Kompleksianalyysi, syksy 2018

Harjoitus 2, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. a) Merkitään $w = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)$, josta nähdään, että $|w| = \sqrt{2}$ ja $\arg(w) = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Yhtälön ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}z} &= \sqrt{2}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+k2\pi)} \quad \big|\log() \\
\mathrm{i}z &= \log(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+k2\pi)}) \\
\mathrm{i}z &= \frac{1}{2}\ln(2) + \mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + k2\pi) \\
z &= \frac{\pi}{4} + k2\pi - \mathrm{i}\frac{1}{2}\ln(2),\ \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

b) Eulerin kaavojen mukaan $\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z})$. Näin ollen yhtälö saa muodon

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}) &= 2 \\
e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z} &= 4\mathrm{i} \\
e^{\mathrm{i}z} - 4\mathrm{i}e^{0} - e^{-\mathrm{i}z} &= 0 \quad \big|\cdot e^{\mathrm{i}z} \\
e^{\mathrm{i}2z} - 4\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z} - e^{\mathrm{i}0} &= 0 \quad \big|w = e^{iz} \\
w^2 - 4\mathrm{i}w - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan $w = (2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i} = (2 \pm \sqrt{3})e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+k2\pi)}$, ja edelleen

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}z} &= (2 \pm \sqrt{3})e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+k2\pi)} \quad \big|\log() \\
\mathrm{i}z &= \ln(2 \pm \sqrt{3}) + \mathrm{i}(\frac{\pi}{2} + k2\pi) \\
z &= \frac{\pi}{2} + k2\pi - \mathrm{i}\ln(2 \pm \sqrt{3}),\ \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

2. a) Nyt $\mathrm{i}^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\mathrm{i}^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{i}^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-1}}$. Merkitään $z = \sqrt[3]{-1}$ ja $w = -1 = e^{\mathrm{i}\pi}$. Nyt siis $z^3 = |z|^3 e^{\mathrm{i}3\varphi} = e^{\mathrm{i}(\pi+k2\pi)}$. Tästä saadaan $z_k = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3})}$. Näistä eri arvot saadaan, kun $k = 0, 1, 2$. Luku $i^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} = e^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3})},\ k = 0, 1, 2$, eli

$$\begin{aligned}
&i^{-\frac{2}{3}} = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \ \text{ tai} \\
&i^{-\frac{2}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \ \text{ tai} \\
&i^{-\frac{2}{3}} = e^{\mathrm{i}\pi} = -1.
\end{aligned}$$

b) Olkoon $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$. Nyt $|z| = 4$ ja $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\log(2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}) &= \log(4e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}+k2\pi)}) \\
&= \ln(4) + \log(e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}+k2\pi)}) \\
&= \ln(4) + \mathrm{i}(\frac{\pi}{3} + k2\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Pääarvo ($k = 0$): $\ln(4) + \mathrm{i}(\frac{\pi}{3})$.

c) Käytetään hyväksi kompleksiluvun eksponenttiesitystä. Olkoon $z = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+k2\pi)}$. Tällöin

$$(1 - \mathrm{i})^{\mathrm{i}} = (e^{\log(1-\mathrm{i})})^{\mathrm{i}}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\mathrm{i}\log(1-\mathrm{i})}\\
&= e^{\mathrm{i}\log(\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+k2\pi)})}\\
&= e^{\mathrm{i}\ln(\sqrt{2})+\mathrm{i}\log(e^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+k2\pi)})}\\
&= e^{\mathrm{i}\ln(\sqrt{2})+\frac{\pi}{4}+k2\pi},\ k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

3. a) Binomikaavasta tai Pascalin kolmiosta saadaan

$$
\begin{aligned}
f(z) = z^4 &= (x+\mathrm{i}y)^4\\
&= x^4 + 4x^3\mathrm{i}y + 6x^2(\mathrm{i}y)^2 + 4x(\mathrm{i}y)^3 + (\mathrm{i}y)^4\\
&= (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + (4x^3y - 4xy^3)\mathrm{i},
\end{aligned}
$$

joten $\mathrm{Re}(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ja $\mathrm{Im}(z) = 4x^3y - 4xy^3$.

b) Tiedetään, että $x = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ ja $y = \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$. Nyt siis

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = x^2 + x - y^2 &= (\frac{1}{2}(z+\overline{z}))^2 + \frac{1}{2}(z+\overline{z}) - (\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}))^2\\
&= \frac{1}{4}(z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2) + \frac{1}{2}(z+\overline{z}) + \frac{1}{4}(z^2 - 2z\overline{z} + \overline{z}^2)\\
&= \frac{1}{2}(z^2 + z + \overline{z} + \overline{z}^2)\ \text{ ja}\\
\mathrm{i}v(x,y) = \mathrm{i}(2xy - y) &= \mathrm{i}(2\cdot\frac{1}{2}(z+\overline{z})\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}) - \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}))\\
&= \frac{1}{2}(z^2 - \overline{z}^2) - \frac{1}{2}(z-\overline{z}).
\end{aligned}
$$

Laskemalla nämä yhteen saadaan

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}(z^2 + z + \overline{z} + \overline{z}^2) + \frac{1}{2}(z^2 - \overline{z}^2) - \frac{1}{2}(z-\overline{z})\\
&= z^2 + \overline{z}.
\end{aligned}
$$

4. Parametrit a, b, c, d voidaan ratkaista systemaattisesti matriisialgebran keinoin yhtälöryhmästä

$$
\begin{cases}
f(z_1) = w_1,\\
f(z_2) = w_2,\\
f(z_3) = w_3,
\end{cases}
$$

mutta ratkaistaan parametrit *ad hoc*-tyyppisesti järkeilemällä. Piste $z_2 = 0$ on hyvä lähtökohta, sillä se antaa suoraan

$$
f(z_2) = f(0) = \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow b = d \quad \text{ja} \quad d \neq 0.
$$

Ehto $d \neq 0$ seuraa myös ehdosta $ad - bc = (a-c)d \neq 0$. Sijoitetaan saatu $b = d$ yhtälöihin $f(-1) = -\mathrm{i}$ ja $f(1) = \mathrm{i}$, jolloin saadaan yhtälöpari

$$
\begin{cases}
\frac{a+d}{c+d} &= \mathrm{i}\\
\frac{-a+d}{-c+d} &= -\mathrm{i}
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
a+d &= c\mathrm{i} + d\mathrm{i}\\
-a+d &= c\mathrm{i} - d\mathrm{i}.
\end{cases}
$$

Laskemalla jälkimmäiset yhtälöt puolittain yhteen saadaan eliminoitua a ja voidaan ratkaista $c = -\mathrm{i}d$. Sijoittamalla saatu ratkaisu vaikkapa yhtälöön $a + d = c\mathrm{i} + d\mathrm{i}$ saadaan $a = d\mathrm{i}$. Näin ollen kysytty Möbius-kuvaus on

$$
f(z) = \frac{d\mathrm{i}z + d}{-d\mathrm{i}z + d} = \frac{d(\mathrm{i}z+1)}{d(-\mathrm{i}z+1)} \overset{d\neq 0}{=} \frac{\mathrm{i}z+1}{-\mathrm{i}z+1}.
$$

Jokainen reaaliakselilla oleva piste on muotoa $z = t \in \mathbb{R}$, jolloin

$$
f(t) = \frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}.
$$

Koska osoittaja ja nimittäjä ovat toistensa kompleksikonjugaatteja, on

$$|f(t)| = \frac{|1+\mathrm{i}t|}{|1-\mathrm{i}t|} = 1.$$

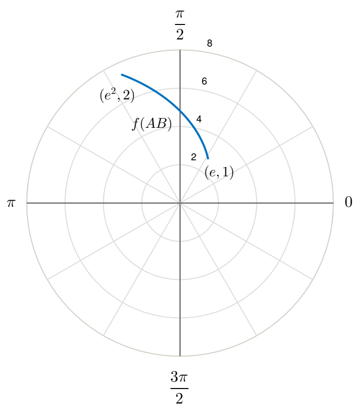
Reaaliakselin kuva on siis yksikköympyrä.

5. Valitaan parametriesitys siten, että janan päätepistettä A vastaa t:n arvo 0 ja vastaavasti pistettä B arvo 2π. Päätepisteiden välinen erotus on $B - A = 1 + \mathrm{i}$ eli $B = A + 1 + \mathrm{i}$. Janan pisteet saadaan siten lausekkeesta $AB = A + c(1+i),\ c \in [0,1]$. Skaalauksella $t = 2\pi c \Leftrightarrow c = \frac{t}{2\pi}$ jana saa esityksen $AB = 1 + \mathrm{i} + \frac{t}{2\pi}(1+\mathrm{i}) = (1+\mathrm{i})(1+\frac{t}{2\pi}),\ t \in [0, 2\pi]$.

   Kuvauksen $f(z) = e^z$ kuva janalle AB on siis

$$f(AB) = f((1+\mathrm{i})(1+\frac{t}{2\pi})) = e^{(1+\mathrm{i})(1+\frac{t}{2\pi})} = e^{1+\frac{t}{2\pi}} e^{\mathrm{i}(1+\frac{t}{2\pi})},\ t \in [0, 2\pi].$$

   Kuva on siis laajenevan spiraalin kaaren pätkä napakoordinaatiston pisteestä $(e, 1)$ $(t = 0)$ pisteeseen $(e^2, 2)$ $(t = 2\pi)$.



Kuva 1: Janan kuva

6. a) Origokeskinen a-säteinen ympyrä voidaan parametrisoida, jolloin jokainen ympyrällä oleva piste z on muotoa $z = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, missä a on vakio ja $\theta \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$w = u + \mathrm{i}v = \mathrm{Log}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\, z = \ln a + \mathrm{i}\theta, \quad \theta \in]-\pi, \pi].$$

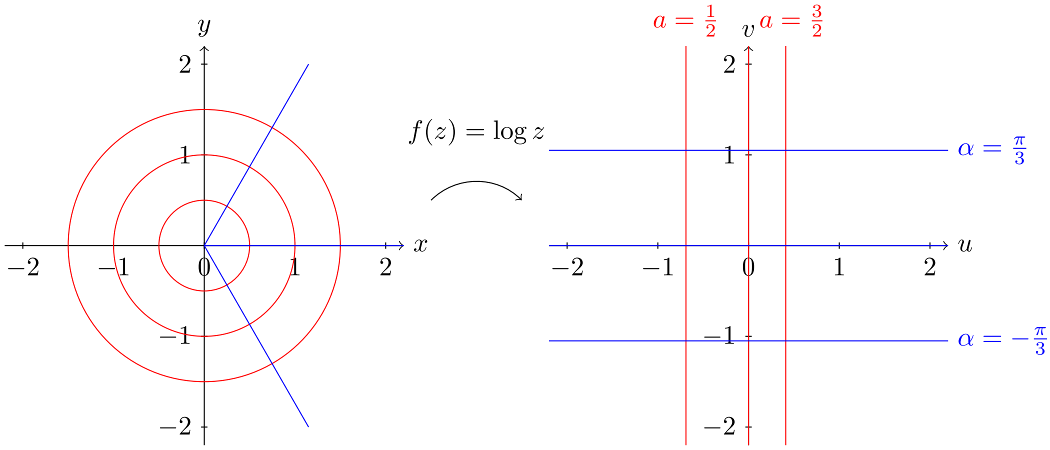
   Koska a on vakio, niin kunkin ympyrän kuva on v-akselin suuntainen jana, joka leikkaa u-akselin pisteessä $(\ln a, 0)$ ja jonka v-koordinaatti on välillä $]-\pi, \pi]$.
   Erityisesti, kun $a = 1$, on kuva imaginaariakselilla oleva jana, sillä $\ln 1 = 0$. Katso Kuva 2.

   b) Säde voidaan parametrisoida niin, että jokainen säteellä oleva piste z on muotoa $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, missä nyt α on vakio ja $r \in \mathbb{R}_+$. Tällöin

$$w = u + \mathrm{i}v = \ln r + \mathrm{i}\alpha.$$

   Koska $r \in \mathbb{R}_+$, niin $\ln r$ saa kaikki reaalilukuarvot, joten kuvapisteet edustavat uv-tasossa reaaliakselin suuntaisia suoria, jotka leikkaavat imaginaariakselin pisteessä $(0, \alpha)$.
   Erityisesti, kun $\alpha = 0$, niin kuvapisteet muodostavat reaaliakselin. Katso Kuva 2.

   c) Kuvasta 2 nähdään, että säteet ja ympyrät sekä niiden kuvat leikkaavat toisensa kohtisuorasti.



Kuva 2: Logaritmifunktion kuvia ympyröille ja säteille