Kompleksianalyysi, syksy 2017

Harjoitus 1, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. Merkitään $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, jolloin $z = w^2$.

a) Kompleksiluvun z reaaliosa, imaginaariosa ja itseisarvo voidaan selvittää joko suorittamalla potenssiin korotus tai käyttämällä joko napakoordinaattiesitystä tai eksponenttiesitystä. Tarkastellaan jälkimmäistä tapaa. Kompleksiluku w löytyy annetulta yksikköympyrältä, joten sen eksponenttiesitys on $w = |w|e^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}(w)} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Tarkkaan ottaen eksponenttiesityksessä esiintyy $\arg(z)$, joka saadaan argumentin pääarvosta $\mathrm{Arg}(z)$ kaavalla

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

mutta usein 2π:n monikerrat saatetaan jättää merkitsemättä näkyviin. Pidetään kuitenkin mielessä, että argumentti on aina 2π:n monikertaa vaille määrätty. Erityisesti yhtälöiden ratkaisemisessa tämän huomioiminen on välttämätöntä.
Edellä saadun perusteella luvun $z = w^2$ eksponenttiesitys on

$$z = |z|e^{\mathrm{i}\arg(z)} = |w|^2 e^{\mathrm{i}(2\mathrm{Arg}(w)+2k\pi)} = e^{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Luku z löytyy yksikköympyrältä, joten

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

eli $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $|z| = 1$.

b) Edellä ratkaistiin jo eksponenttiesitys, josta saadaan näppärästi myös argumentin pääarvo. Koska a)-kohdan mukaan

$$\arg(z) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

niin valitsemalla erityisesti $k = -1$ löydetään välillä $]-\pi, \pi]$ oleva argumentin arvo, eli

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Vaikka nyt

$$\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(w^2) = -\frac{2\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \mathrm{Arg}(w),$$

niin usein on hyödyllistä huomata, että $\mathrm{Arg}(z^2)$ ja $2 \cdot \mathrm{Arg}(z)$ ovat 2π:n monikertaa vaille samat. Tätä ominaisuutta itse asiassa hyödynnettiin a)-kohdassa.

2. a) Tässä kannattaa hyödyntää joko napakoordinaattiesitystä tai eksponenttiesitystä. Kantaluvun eksponenttiesitykseksi saadaan samalla tavalla kuin tehtävässä 1 yksikköympyrää hyödyntämällä

$$-1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}(\frac{3\pi}{4}+k2\pi)},$$

joten

$$|z| = \sqrt{2}^{2018} = 2^{1009} \quad \text{ja} \quad \arg(z) = 2018 \cdot \frac{3\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z},$$

sillä

$$2018 \cdot \frac{3\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2\underbrace{(k + 756)}_{\overset{\text{merk.}}{=} l}\pi.$$

b) Koska osamäärän itseisarvo on itseisarvojen osamäärä, niin

$$|z| = \frac{|1 + \mathrm{i}|}{|1 - \mathrm{i}|} = 1,$$

sillä osoittajassa ja nimittäjässä olevat luvut ovat toistensa konjugaatteja ja pituus säilyy konjugoinnissa. Saman voi toki todeta myös suoraan laskemalla.

Argumentin määräämisessä kannattaa hyödyntää esimerkiksi eksponenttiesitystä. Yksikköympyrästä saadaan

$$\begin{aligned}\arg(z) &= \arg(1+\mathrm{i}) - \arg(1-\mathrm{i}) = \arg(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}) - \arg(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi.\end{aligned}$$

c) Käytetään jälleen hyväksi kompleksiluvun eksponenttiesitystä. Kuten edellisissä kohdissa saadaan yksikköympyrän avulla

$$\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}) = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

ja

$$1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}) = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},$$

joten

$$|z| = \frac{2^{2018}}{2^{2018}} = 1 \quad \text{ja} \quad \arg(z) = 2018(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi = \pi + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

3. Olkoon $w = z^3 = -8\mathrm{i}$, jolloin $z = \sqrt[3]{w}$. Nyt $z = r_z e^{\mathrm{i}\phi_z}$ ja $w = r_w e^{\mathrm{i}\phi_w}$. Tällöin $r_w = |w| = 8$, $\phi_w = -\frac{\pi}{2}$ ja $z^3 = r_z^3 e^{\mathrm{i}3\phi_z}$. Näin saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} r_z^3 = r_w \\ 3\phi_z = \phi_w + k2\pi, \ k \in \mathrm{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_z = \sqrt[3]{r_w} = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \phi_z = \frac{\phi_w}{3} + k\frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, \ k \in \mathrm{Z} \end{cases}$$

Kuutiojuuret ovat siten $z_k = 2e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3})}$, kun $k = 0, 1, 2$:
$z_0 = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, $z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{i}$ ja $z_2 = 2e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

4. a) Merkitään $z^2 = w$, jolloin yhtälö $z^4 + z^2 + 1 = 0$ on toisen asteen yhtälö $w^2 + w + 1 = 0$ muuttujan w suhteen. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Molemmat oikean puolen luvut ovat yksikköympyrällä. Tehtävästä 1 saadaan eksponenttiesitykset

$$w_1 \overset{\text{merk.}}{=} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} \quad \text{ja} \quad w_2 \overset{\text{merk.}}{=} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

Yhtälön $z^2 = w_1$ ratkaisut saadaan merkitsemällä $z = re^{\mathrm{i}\phi}$ ja ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\phi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \phi = \frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ratkaisut ovat $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ja $z_1 = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Molemmat näistä on yksikköympyrällä, josta saadaan perusmuodot

$$z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{ja} \quad z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Vastaavalla tavalla yhtälön $z^2 = w_2$ ratkaisuiksi saadaan $z_2 = e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ ja $z_3 = e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$, joiden perusmuodot

$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{ja} \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

saadaan yksikköympyrästä.

b) Polynomi on muotoa $(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Huomaamalla, että polynomin nollakohdat esiintyvät konjugaattipareina $z_2 = \overline{z_0}$ ja $z_3 = \overline{z_1}$ (kuten reaalikertoimisella polynomilla kuuluukin), saadaan toisen asteen reaalikertoimiset tekijät

$$(z - z_0)(z - z_2) = (z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_0) + |z_0|^2 = z^2 - z + 1$$

ja

$$(z - z_1)(z - z_3) = (z - z_1)(z - \overline{z_1}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_1) + |z_1|^2 = z^2 + z + 1.$$

Edellisten tekijöiden tuloksi saadaan

$$(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^2 + 1$$

kuten pitääkin.

5. Olkoon $z = x + \mathrm{i}y$, jolloin Re $z = x$ ja Im $z = y$

a) Sijoittamalla perusmuoto $z = x + \mathrm{i}y$ yhtälöön saadaan

$$z(\overline{z} + 2) = (x + \mathrm{i}y)(x + 2 - \mathrm{i}y) = x^2 + 2x + y^2 + 2y\mathrm{i} = 3 = 3 + \mathrm{i}0.$$

Koska yhtäsuuruuden molempien puolien reaali- ja imaginaariosien täytyy olla samat, saadaan

$$y = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + 2x + y^2 = 3 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, -3 \quad \text{ja} \quad y = 0.$$

Ratkaisujoukon muodostavat siis kaksi pistettä $z_1 = 1$ ja $z_2 = -3$.

b) Sijoittamalla jälleen perusmuoto epäyhtälöön saadaan

$$1 < |x + (y + 1)\mathrm{i}| \leq 2 \Leftrightarrow 1 < x^2 + (y + 1)^2 \leq 4.$$

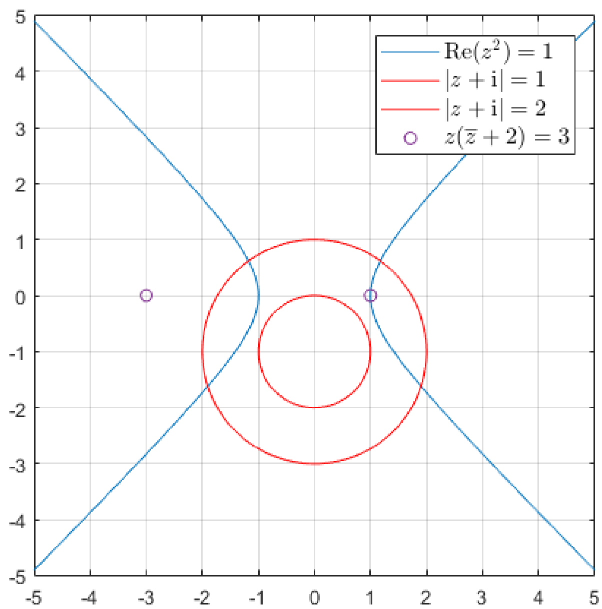
Ratkaisujoukko on siis $(0, -1)$-keskisten 1 ja 2 säteisten ympyröiden väliin jäävä ympyrärengas.

c) Nyt $z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$, joten

$$\mathrm{Re}(z^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1.$$

Ratkaisujoukko on hyperbeli.

Ratkaisujoukkoja on havainnollistettu alla olevassa kuvassa. Kohdan b) ratkaisujoukko on kuvassa olevien ympyröiden väliin jäävä alue.



Kuva 1: Ratkaisujoukkojen geometrinen havainnollistus

6. a) Koska komponentissa on kytketty rinnan kondensaattori ja kela, niin komponentin impedanssi Z saadaan kaavasta

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega L} + \mathrm{i}\omega C = \frac{1 - \omega^2 LC}{\mathrm{i}\omega L},$$

joten impedanssi on

$$Z = \frac{\mathrm{i}\omega L}{1-\omega^2 LC}.$$

Yllä ω on fysikaalinen kulmataajuus, joten on järkevää tarkastella ainoastaan tapausta $\omega \geq 0$. Koska Z on puhtaasti imaginaarinen, on $\mathrm{Arg}(Z)$ joko $\frac{\pi}{2}$ tai $-\frac{\pi}{2}$ riippuen Z:n nimittäjän merkistä. Eksponenttiesitykseksi saadaan

$$Z = |Z|e^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}(Z)} = \begin{cases} \frac{\omega L}{1-\omega^2 LC} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, & \text{kun } \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}, \\ \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, & \text{kun } \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}. \end{cases}$$

b) Resonanssitaajuudella impedanssin imaginaariosa katoaa. Koska Z on nyt puhtaasti imaginaarinen, niin a)-kohdan perusteella resonanssitaajuus on $\omega = 0$, jolloin komponentti ei vastusta virtaa lainkaan.

c) Koska

$$|Z| = \left| \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} \right| \to 0,$$

kun $\omega \to 0$ tai $\omega \to \infty$, niin komponentti ei vastusta virtaa lainkaan pienillä ja suurilla taajuuksilla. Niinpä komponentti vastustaa virtaa ainoastaan ”keskisuurilla” taajuuksilla, eli kyseessä on *kaistanestosuodatin*.