Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

2. välikoe 26.10.2017

1. Olkoon
$$f(z) = \frac{2z+2}{3z-6}.$$
   a) Laske funktion f Taylorin sarja pisteen $z_0 = 1$ ympäristössä. Mikä on sarjan suppenemissäde? (4p)

   b) Laske $f^{(2017)}(1)$. (2p)

2. Olkoon
$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}.$$
   a) Määrää funktion f navat. (2p)

   b) Laske residylaskun avulla integraali (4p)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

3. Erään FIR-suodattimen impulssivaste on
$$(h(n))_{n=0}^{\infty} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0, \dots\right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} h(n) = 1.$$
   a) Määrää suodattimen amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\operatorname{Arg} H(\omega)$. (4p)

   b) Millä taajuudella suodatus on voimakkainta, eli milloin $|H(\omega)|$ saa minimiarvonsa? Onko vaihevaste lineaarinen eli muotoa $\operatorname{Arg} H(\omega) = k\omega$ jollekin vakiolle k? (2p)

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{C} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \right]_{z=z_0}$$

$$X(\omega) = \sum_{n} x(n) e^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_{n} x(n) z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega) e^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z) z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z) \mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} \mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä