Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Kurssikoe 19.10.2016

1. Ratkaise yhtälö

   a) $z^3 = 2$.

   b) $\cos z = -2$.

2. Laske
$$\int_C \frac{2z}{z^2+4}\mathrm{d}z,$$
   kun C on ympyrä

   a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

   b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$

   positiiviseen suuntaan kierrettynä.

3. Olkoon
$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-3}}$$
   erään digitaalisen kampasuotimen siirtofunktio.

   a) Määrää kampasuotimen impulssivaste kausaalisessa tapauksessa.

   b) Taajuusvastefunktio $H(\omega)$ on määritelmän mukaan $H(\omega) = \mathbf{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})$. Määrää suotimen amplitudivaste $|H(\omega)|$.

   c) Milloin suodatus on voimakkainta, eli millä kulmataajuuden ω arvoilla $|H(\omega)|$ saavuttaa minimiarvonsa?

4. Kertalukua 3 olevan Butterworth-suodattimen taajuusvastefunktio $H(\omega)$ määritellään kaavalla
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^6}.$$
   Laske suodattimen ekvivalentti kaistanleveys W_{eq}, joka määritellään asettamalla
$$W_{eq} = \frac{1}{2|H(0)|^2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \right]_{z=z_0}$$

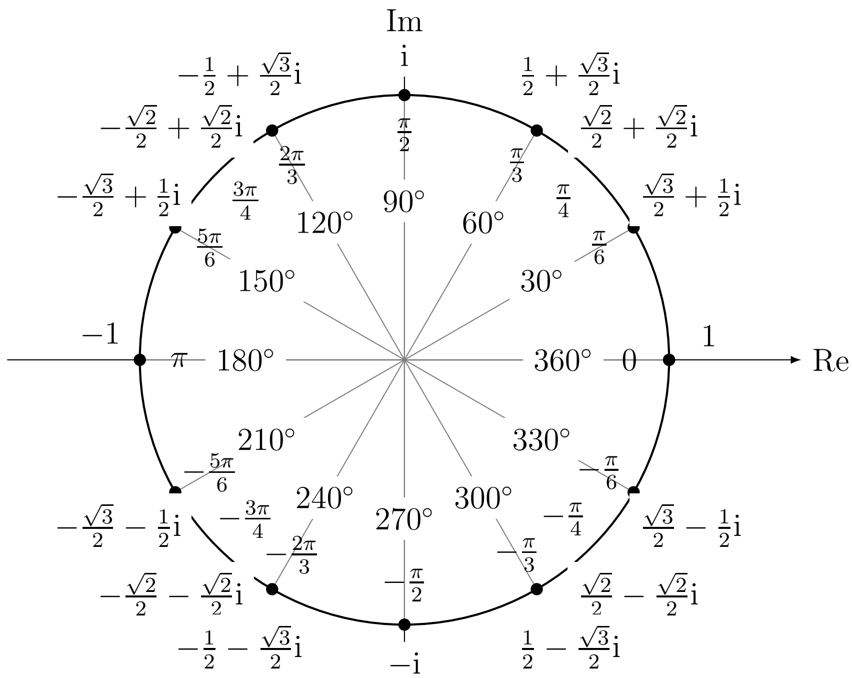
$$X(\omega) = \sum_n x(n) e^{-i\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$x(n - k) \leftrightarrow X(\omega) e^{-i\omega k} \qquad x(n - k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z) z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z) \mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} dz$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. a) Käytetään eksponenttiesitystä ja merkitään $z = re^{i\theta}$. Yhtälön oikean puolen eksponenttiesitys on $2 = 2e^{ik2\pi}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Saadaan yhtälö

$$r^3 e^{i3\theta} = 2e^{ik2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{2} \quad \text{ja} \quad \theta = k\frac{2\pi}{3},\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Löytyy 3 erisuurta juurta

$$z_k = \sqrt[3]{2}e^{ik\frac{2\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Juuret voi saattaa yksikköympyrän avulla myös muotoon $z_k = x_k + iy_k$, mutta myös yllä oleva eksponttiesitys riittää.

b) Käytetään kaavakokoelman kaavaa

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

jonka mukaan

$$\begin{aligned}
\cos z = -2 &\Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = -4 \quad \Big|\Big| \cdot e^{iz} \\
&\Leftrightarrow e^{i2z} + 4e^{iz} + 1 = 0, \\
&\Leftrightarrow e^{iz} = -2 \pm \sqrt{3} \quad \text{(käytettiin 2. asteen yhtälön ratk.kaavaa)} \\
&\Leftrightarrow iz = \log(-2 \pm \sqrt{3}) = \ln|-2 \pm \sqrt{3}| + i(\pi + k2\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow z = (2k+1)\pi - i\ln(2 \mp \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

2. Lasketaan ensin integroitavan funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}$$

navat eli nimittäjän nollakohdat. Navat ovat $z = 2i$ ja $z = -2i$.

a) Molemmat navat ovat yksikköympyrän ulkopuolella, joten Cauchyn lauseen nojalla integraali on nolla.

b) Molemmat navat ovat nyt ympyrän C sisällä. Integraali voidaan laskea joko Cauchyn kaavan tai residylauseen avulla. Jos käytetään Cauchyn kaavaa, niin hajotetaan $f(z)$ OMK:n avulla muotoon

$$f(z) = \frac{2z}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{z + 2i + z - 2i}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{z+2i} + \frac{1}{z-2i}.$$

Tämän avulla integraaliksi saadaan

$$I = \int_C \frac{1}{z+2i}dz + \int_C \frac{1}{z-2i}dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i.$$

3. a) Käytetään geometrisen sarjan summakaavaa, jolloin

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z^3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-3k}, \quad |z| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Impulssivaste on siis

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}, & n = 3k, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

b) Koska

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega}},$$

ja Eulerin kaavan mukaan $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega} = \cos(3\omega) - \mathrm{i}\sin(3\omega)$, niin amplitudivaste on

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\cos(3\omega)\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2(3\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos(3\omega)}}.$$

c) Suodatus on voimakkainta, kun nimittäjä saa maksimiarvonsa eli kun $\cos(3\omega) = -1$. Suodatus on siis voimakkainta kulmataajuuksilla $\omega = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$.

4. Lasketaan ensin integroitavan funktion navat eli nimittäjän nollakohdat eksponenttiesityksen $\omega = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avulla:

$$\omega^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}6\theta} = -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi + k2\pi)} \Leftrightarrow r = 1 \text{ ja } \theta = \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Edellisen perusteella navat ovat $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/6}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Kaikki navat ovat yksinkertaisia ja ylemmässä puolitasossa olevat navat ovat ω_0, ω_1 ja ω_2.

Koska $H(0) = 1$, niin Residylauseen mukaan

$$W_{eq} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}_{\omega=\omega_0}|H(\omega)|^2 + \mathrm{Res}_{\omega=\omega_1}|H(\omega)|^2 + \mathrm{Res}_{\omega=\omega_2}|H(\omega)|^2\right). \quad (1)$$

Koska navat ovat yksinkertaisia, niin residyt voidaan laskea kaavalla

$$\mathrm{Res}_{\omega=\omega_k}\frac{1}{1+\omega^6} = \left.\frac{1}{6\omega^5}\right|_{\omega=\omega_k}.$$

Yksikköympyrän avulla residyiksi saadaan

$$\mathrm{Res}_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}} = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6} = \frac{1}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right),$$
$$\mathrm{Res}_{\omega=\omega_1} = \frac{1}{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}} = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\frac{1}{6}\mathrm{i},$$
$$\mathrm{Res}_{\omega=\omega_2} = \frac{1}{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}} = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

Sijoittamalla saadut tulokset kaavaan (1) saadaan

$$W_{eq} = \pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{12}\mathrm{i} - \frac{1}{6}\mathrm{i} - \frac{1}{12}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{3}.$$