Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Kurssikoe 19.10.2016

1. Ratkaise yhtälö

   a) $z^3 = 2$.

   b) $\cos z = -2$.

2. Laske

$$\int_C \frac{2z}{z^2+4}\mathrm{d}z,$$

   kun C on ympyrä

   a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

   b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$

   positiiviseen suuntaan kierrettynä.

3. Olkoon

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-3}}$$

   erään digitaalisen kampasuotimen siirtofunktio.

   a) Määrää kampasuotimen impulssivaste kausaalisessa tapauksessa.

   b) Taajuusvastefunktio $H(\omega)$ on määritelmän mukaan $H(\omega) = \mathbf{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})$. Määrää suotimen amplitudivaste $|H(\omega)|$.

   c) Milloin suodatus on voimakkainta, eli millä kulmataajuuden ω arvoilla $|H(\omega)|$ saavuttaa minimiarvonsa?

4. Kertalukua 3 olevan Butterworth-suodattimen taajuusvastefunktio $H(\omega)$ määritellään kaavalla

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^6}.$$

   Laske suodattimen ekvivalentti kaistanleveys W_{eq}, joka määritellään asettamalla

$$W_{eq} = \frac{1}{2|H(0)|^2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Loppukoe 23.11.2016

1. Esitä kompleksiluku z muodossa $z = x + \mathrm{i}y$ ja määrää argumentin pääarvo $\mathrm{Arg}(z)$, kun

   a) $z = \log(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

   b) $z = (-1 + \mathrm{i})^{2016}$.

2. Olkoon
$$f(z) = 3x^2 - 3y^2 + 2xy\mathrm{i}, \quad z = x + \mathrm{i}y,$$
   kompleksifunktio.

   a) Tutki, onko f analyyttinen.

   b) Määrää reaaliakselin ja imaginaariakselin kuva funktiolle f. Onko f konforminen origossa?

3. Olkoon
$$\mathbf{H}(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-5}$$
   erään digitaalisen kampasuotimen siirtofunktio.

   a) Määrää kampasuotimen impulssivaste kausaalisessa tapauksessa.

   b) Taajuusvastefunktio $H(\omega)$ on määritelmän mukaan $H(\omega) = \mathbf{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})$. Määrää suotimen vaihevaste $\mathrm{Arg}(H(\omega))$.

   c) Milloin suodin ei vaihesiirrä signaalia, eli millä kulmataajuuden ω arvoilla vaihevaste on nolla?

4. Erään suodattimen taajuusvastefunktio $H(\omega)$ on
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}.$$
   Laske suodattimen ekvivalentti kaistanleveys W_{eq}, joka määritellään asettamalla
$$W_{eq} = \frac{1}{2|H(0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Loppukoe 30.1.2017

1. Esitä kompleksiluku z muodossa $z = x + \mathrm{i}y$ ja määrää argumentin pääarvo $\mathrm{Arg}(z)$, kun

   a) $z = \frac{-1+\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}$.

   b) $z = (-1 + \sqrt{3}\mathrm{i})^{2017}$.

2. Olkoon

$$f(z) = \mathrm{e}^z, \quad z \in \mathbb{C},$$

   kompleksinen eksponenttifunktio.

   a) Osoita Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla, että f on analyyttinen. (4p)

   b) Määrää imaginaariakselin kuva funktiolle f. Mitä kuva esittää geometrisesti? (2p)

3. Laske integraali

$$\int_{|z|=1} \frac{4z \sin z}{4z^2 - 4\mathrm{i}z + 3} \mathrm{d}z,$$

   missä käyrä $\{|z| = 1\}$ kierretään kerran positiiviseen kiertosuuntaan.

4. Eräs suodin on määritelty differenssiyhtälöllä

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1). \tag{1}$$

   a) Määrää suotimen amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\mathrm{Arg}\, H(\omega)$. (4p)

   b) Määritellään suodin $\mathbf{H_1}$ asettamalla $\mathbf{H_1}(z) = \mathbf{H}(-z)$, missä $\mathbf{H}(z)$ on kaavalla (1) määritellyn suotimen siirtofunktio. Suotimet $\mathbf{H}$ ja $\mathbf{H_1}$ muodostavat kaksikaistaisen QMF-suodinpankin. Osoita, että

$$|H_1(\omega)| = |H(\pi - \omega)|,$$

   missä H ja H_1 ovat suotimien $\mathbf{H}$ ja $\mathbf{H_1}$ taajuusvastefunktiot. (2p)

Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Loppukoe 4.4.2017

1. Esitä kompleksiluku z muodossa $z = x + \mathrm{i}y$ ja määrää argumentin pääarvo $\mathrm{Arg}(z)$, kun

   a) $z = \mathrm{i}^{2017}$.

   b) $z = \frac{1}{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$.

   c) $z = \sqrt{1+\mathrm{i}}$.

2. a) Määrää funktion $f(z) = z^2$ reaali- ja imaginaariosa. (2p)

   b) Määrää analyyttinen funktio $f(z)$, jonka reaaliosa on $\mathrm{Re}(f(z)) = z^2 + \overline{z}^2$. (4p)

3. Laske residylaskun avulla keskimääräinen teho

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\mathrm{d}f$$

   satunnaissignaalille, jonka tehotiheysspektri on

$$S(f) = \frac{f^2}{f^4 + 8f^2 + 16}.$$

4. Signaalinkäsittelyssä käytetään ikkunointia impulssivasteen katkaisemiseksi. Tarkastellaan Hannin ikkunaa

$$h_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right), & n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ 0, & \text{muulloin}, \end{cases} \qquad (2)$$

   missä N on jokin positiivinen kokonaisluku.

   a) Kuinka monta nollasta poikkeavaa termiä on tapauksessa $N = 5$? Anna nollasta poikkeavien termien tarkat arvot esimerkiksi yksikköympyrän avulla. (2p)

   b) Määrää Hannin ikkunan amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\mathrm{Arg}\, H(\omega)$ tapauksessa $N = 5$. (4p)

Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Kesätentti 26.8.2017

1. Olkoon $z = 1 + \mathrm{i}$. Määrää esitys $x + \mathrm{i}y$ ja argumentin pääarvo seuraaville kompleksiluvuille
   a) z^{2017},
   b) $\log z$,
   c) $\cos z$.

2. Olkoon $f(z) = z^2$, missä $z = x + \mathrm{i}y$. Määrää funktion f kuva
   a) ympyrälle $|z| = 2$.
   b) hyperbelille $2xy = 1$. (4p)

3. Laske LTI-systeemin, jonka siirtofunktio on
$$H(z) = \frac{8z}{z^2 - 4z + 3}, \quad z \in \mathbb{C},$$
   impulssivaste, kun siirtofunktiota tarkastellaan alueessa
   a) $|z| > 3$,
   b) $1 < |z| < 3$.

   Onko systeemi kausaalinen kummassakaan tapauksessa?

4. Signaalinkäsittelyssä käytetään ikkunointia impulssivasteen katkaisemiseksi. Tarkastellaan sini-ikkunaa
$$h_N(n) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi n}{N-1}\right), & n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ 0, & \text{muulloin}, \end{cases} \tag{3}$$
   missä N on jokin positiivinen kokonaisluku.

   a) Kuinka monta nollasta poikkeavaa termiä on tapauksessa $N = 4$? Anna nollasta poikkeavien termien tarkat arvot esimerkiksi yksikköympyrän avulla. (2p)
   b) Määrää sini-ikkunan amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\operatorname{Arg} H(\omega)$ tapauksessa $N = 4$. (4p)

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \right]_{z=z_0}$$

$$X(\omega) = \sum_n x(n) e^{-i\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$x(n - k) \leftrightarrow X(\omega) e^{-i\omega k} \qquad x(n - k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z) z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z) \mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} dz$$

Yksikköympyrä