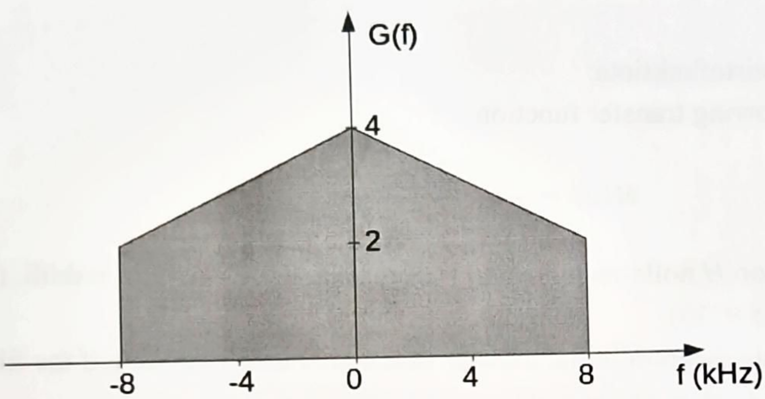
**Digitaaliset suodattimet/Digital filters, 521337A** 1.välikoe/1st intermediate exam (9.2.2024)

1. Kerro lyhyesti muutamalla rivillä, mikä Fourierin konvoluutioteoreema on ja miksi se on tärkeä suodattimien ominaisuuksia tutkiessa.

   Briefly explain in a few lines what the Fourier convolution theorem is and why it is useful when studying the properties of a filter.

2. Tutki analogisen signaalin taajuusspektri $G(f)$, joka on kuvattuna alla:
   Consider the frequency spectrum $G(f)$ of an analog signal depicted below:




Signaalia näytteistetään taajuudella $F_s = 12$ kHz, mikä aiheuttaa signaalin laskostumista.
The signal is sampled using a sampling frequency $F_s = 12$ kHz, which causes aliasing.

a) Mikä on matalin taajuus, jolla esiintyy laskostumisvirhettä, ja mikä on virheen suuruus siinä taajuudessa?
What is the lowest frequency where aliasing error occurs and how much is the error at that frequency?

Laskostumisen ehkäisemiseksi signaali suodatetaan Butterworth-suodattimella $H(f)$, jossa $n = 2$ ja katkaisutaajuus $f_c = 6$ kHz.
To prevent aliasing, the signal is filtered with a Butterworth filter $H(f)$, where $n = 2$ and the cut-off frequency is $f_c = 6$ kHz.

b) Kuinka paljon a)-kohdan laskostumisvirhe vaimenee desibeleissä?
How much is the aliasing error calculated in a) attenuated in decibels?

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

3. Laske diskreetin ja jaksollisen signaalin $x = [1, -1, 1, -1]$ Fourier-muunnos käyttäen FFT-algoritmia. *(Vihje: 2-pituisen signaalin $[a, b]$ DFT:n voi laskea kaavalla $[a + b, a - b]$).*
Given the discrete and periodic signal $x = [1, -1, 1, -1]$, calculate its discrete Fourier transform using the FFT algorithm *(Hint: the DFT of a 2-samples signal $[a, b]$ is given by $[a + b, a - b]$).*

4. Tutki seuraavaa siirtofunktiota:
Consider the following transfer function:

$$H(z) = \frac{2z - 1}{2z^3 + z^2 + 2z + 1}$$

Piirrä siirtofunktion $H$ nolla-napa-kaavio ja perustele, onko suodatin stabiili. (Vihje: $2z^3 + z^2 = z^2(2z + 1)$).
Draw the zero-pole diagram of the transfer function $H$ and determine if the filter is stable or not (Hint: $2z^3 + z^2 = z^2(2z + 1)$).