

**DIGITAALISET SUODATTIMET 521337A (DIGITAL FILTERS)****Tentti- ja paikontatehtävät /Exam and patching problems 17.3.2022 08.15-11.45****Tenttitehtävät sivuilla 2 ja 3.****Viikkokokeiden paikontatehtävät ovat edempänä tässä tiedostossa alkaen sivulta 4, jolta löytyvät paikannon ohjeet.****Exam problems on pages 2 and 3.****Week exam patching problems are further in this file starting on page 4 that contains the patching instructions.****Viikkokokeiden uusinnat vs. lopputentti? Miten valitsisin?****Week exam retakes or the final exam? How should I choose?**

Arvioit itse, kumpi menettely on oppimisesi ja loppuarvosanasi kannalta parempi.

It is up to you to decide which approach is better from the point of view of your learning outcomes and final grade.

**Impulssivasteiden laskennasta****About calculating the impulse responses**

Kolmen ensimmäisen termin laskenta riittää. Useampiakin saa laskea.

Calculating three first terms suffices. You are welcomed to calculate additional ones.

**Viimeisellä sivulla ikkunafunktio- taulukot****Window function tables on the last page**

## DIGITAALISET SUODATTIMET 521337A (DIGITAL FILTERS)

Tentti/Exam 17.3.2022 08.15-11.45

1. Erään signaalin kiinnostava kaista ulottuu 100 Hz:iin, mutta mittalaitteessa siihen summautuu muita signaaleja. Näitä aiheutuu esimerkiksi ihmisten ja eläinten askeleista ja ohiajavista autoista. Tästä johtuen pitkältä ajalta mitatun signaalin spektri on alla olevan kuvan karkeasti esittämän kaltainen.

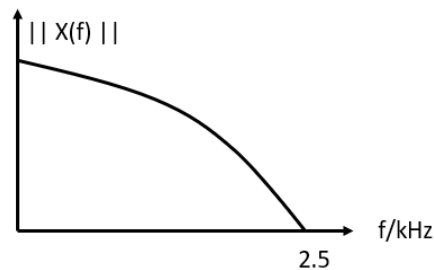
Näytteistystaajuudeksi on valittu 5kHz. Saat tehtäväksesi suunnitella ratkaisun, joka tuottaa 20 bitin näytteitä aikajatkuvasta signaalista. Laskostumisten kiinnostavalle kaistalle on jätävä alle signaalikvantisointikohinan. Saat ohjeeksi käyttää Butterworth-tyyppistä laskostumisenestosuodatinta. 100Hz kohdalla signaali saa vaimentua korkeintaan 3dB.

Mikä on tarvittun suodattimen kertaluku?

The interesting band of a signal extends to 100 Hz, but in the measurement device other signals are added to it. They originate from humans walking and cars passing by. For this reason the long term spectrum of the signal is roughly as shown in the figure below.

The selected sampling frequency is 5kHz. Your task is to create a solution that produces 20 bit samples from the analog continuous time signal. Aliasing onto the interesting band must be below the signal quantization noise level. You are instructed employ a Butterworth anti-aliasing filter. At 100Hz the signal is allowed to attenuate at most by 3 dB.

What is the order of the needed filter?



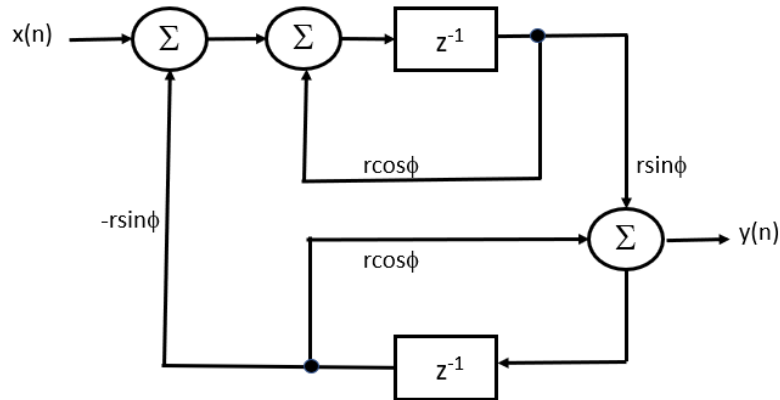
2. Törmäät erään toisen signaalin mittauksessa käytetyn suodattimen siirtofunktioon on alla. Selvität uteliaisena sen impulssivasteen.

You stumble on a transfer function below used in the measurements of another signal. Out of curiosity you determine its impulse response.

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

3. Mittalaitteen aikadiskreettiin osuuteen sinun on ohjelmoitava seuraavan reaalisiaattiorakenteen suodatin. Mikä on sen siirtofunktio? Millainen suodatin on kyseessä?

You are asked to write the software code for the following filter that resides in discrete time section of the measurement device. What is its transfer function? What kind of filter is it?



4. Eräässä suunnitelmassa on 40 Hz:n näytteistystaajuudella toimiva digitaalinen FIR *ylipäästösuodatin*, tulee vaimentaa estokaistalla 5 Hz:n kohdalla vähintään 30 dB. Saat HW-suunnittelijan pyynnöstä tehtäväksesi tarkistaa, riittääkö estokaistan vaimennus, jos suodattimen kertoimet kvantisoidaan kahdeksan bittiksi. Suodattimen differenssiyhtälö on alla.

A design for includes a digital FIR filter that operates at 40 Hz sampling rate and is required to attenuate at least 30 dB in its stopband at 5 Hz. The hardware designer asks you to verify the sufficiency of the stopband attenuation if the coefficients of the filter are quantized to 8 bits. The difference equation of the filter is below.

$$y(n) = 0.1667 * x(n) - 0.4024 * x(n-1) + 0.4024 * x(n-2) - 0.1667 * x(n-3)$$

5. Saat tehtäväksesi suunnitella ratkaisun, joka nostaa erään testaussignaalin näytteistystaajuuden 5 Hz:tä 45 Hz:iin kahdessa vaiheessa tarviten mahdollisimman vähän laskentaa. Sen varsinainen kiinnostava kaista on [0, 2] Hz.

Näytteistystaajuuden nostaminen saa lisätä kiinnostavan kaistan rippeliä korkeintaan 0.05 dB ja kuvastumisten on vaimennuttava vähintään 47 dB.

Kuinka suuren laskentatehon tarvitset? Tarvittavat suodattimet suunnitellaan sopivia ikkunafunktioita käyttäen.

You are given the task to design a solution that increases the sampling rate of a test signal from 5 Hz to 45 Hz in two stages using least computation effort. The actual interesting band of the signal is [0, 2] Hz.

The increase of the sampling rate is allowed to increase the ripple in the interesting band by at most 0.05 dB while the imaging frequencies must be attenuated by at least 47 dB.

How much computing power do you need? The necessary filters are designed using suitable window functions.

How much computing power do you need? The necessary filters are designed using suitable window functions.

**DIGITAALISET SUODATTIMET 521337A (DIGITAL FILTERS)**  
**Week exam patching/Viikkokokeiden paikonta 17.3.2022 08.15-11.45**

**Paikannon periaatteet/the patching scheme:**

Uusinnoista saadut pisteet korvaavat aiemmat *tehtävä tehtävältä* (max 3p/tehtävä) pistetililläsi. Kunkin paikontakokeen ensimmäinen tehtävä vastaa aiemman viikkokokeen tehtävää 1 ja toinen tehtävää 2. Voit tarkistaa tilanteesi viikkokokeiden tuloslistalta.

Lopullisessa arvostelussa otetaan huomioon seitsemän parasta viikkokoea kahdeksasta [tämä menettely on tarkoitettu poissaolon kompensoimiseen]. Kuitenkin sekä viikkokokeiden 1-4 että 5-8 pistekertymien on ennen tätä valintaa erikseen oltava vähintään 12 pistettä.

The points from this re-take replace the earlier points *problem by problem* on your points account (max 3p/problem). The first problem of each patching exam corresponds to the problem 1 of the earlier week exam and the second to problem 2. You can check your situation from the week exam results sheet.

The final grading takes into account the seven best week exam results out of the total eight [this principle is to compensate for an absence]. However, you need to have accumulated at least 12 points from both week exam sets 1-4 and 5-8 before that step.

**Tehtävien taustaksi/for the background of the problems:**

Pääset kehittämään ultratiheisiin langattomiin antureihin perustuvaa teknologiaa, jolla pystytään seuraamaan hyvin matalataajuisia signaaleja, jotka liittyvät maanjäristyksiin, kyeten erottamaan ne muista ilmiöistä.

You get an opportunity participate in the development of technology for tracking very low frequency signals from earthquakes, while being capable of discriminating those from other sources. The foundation is ultra-dense wireless networks of sensors.

## Viikkokoe 1/Week exam 1

1. Seismometrin signaalin kiinnostava kaista ulottuu 100 Hz:iin, mutta mittalaitteessa siihen summautuu muita signaaleja. Näitä aiheuttaa esimerkiksi ihmisten ja eläinten askeleista ja ohiajavista autoista. Tästä johtuen pitkältä ajalta mitatun signaalin spektri on alla olevan kuvan karkeasti esittämän kaltainen.

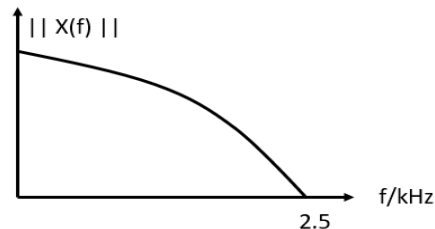
Näytteistystaajuus on 5kHz. Tehtäväsi on suunnitella ratkaisu, joka tuottaa 20 bitin näytteitä seismometrin anturisygnaalista. Laskostumisen kiinnostavalle kaistalle on jätävä alle signaalikvantisointikohinan. Saat ohjeeksi käyttää Butterworth-tyyppistä laskostumisenestosuodatinta. 100Hz kohdalla signaali saa vaimentua korkeintaan 3dB.

Mikä on tarvitun suodattimen kertaluku?

The interesting band a seismometer signal extends to 100 Hz, but in the measurement device other signals are added to it. These originate from humans walking and cars passing by. For this reason the spectrum of the signal is roughly as shown in the figure below.

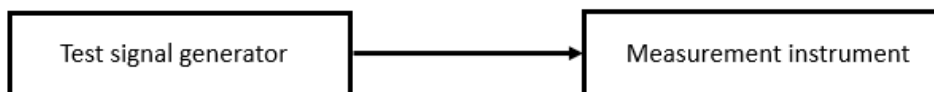
The selected sampling frequency is 5kHz. Your task is to create a solution that produces 20 bit samples from the seismometer sensor signal. Aliasing onto the interesting band must be below the signal quantization noise level. You are instructed employ a Butterworth anti-aliasing filter. At 100Hz the signal is allowed to attenuate at most by 3 dB.

What is the order of the needed filter?



2. 5 kHz taajuudella näytteistettyä kaistaltaan rajoitettua [0, 100] Hz signaalia käytetään seismometrin testauksessa. Tällöin signaali syötetään nollannen kertaluokan pitoa käyttävään D/A-muuntimeen ja 100Hz:n kohdalla signaali saa vaimentua nimellistasostaan korkeintaan 1 db. Seismometri toimii 20 bitin tarkkuudella ja kuvastukset eivät saa erottua sille signaalikvantisointikohinasta. Mikä on tarvitun Butterworth-tyyppisen kuvastumisenestosuodattimen cut-off-taajuus ja kertaluku? Desibelit voi pyöristää ensimmäiseen desimaaliinsa.

A stored bandlimited [0,100] Hz that has been sampled at 5 kHz is used in the testing the seismometer. The signal is fed into a D/A converter that employs zero-order-hold, and the signal is allowed to be attenuated by at most 1 dB from its nominal level at 100Hz. The seismometer device uses 20 bit precision and the imaging components of the test signal may not be detectable from the signal quantization noise. What are the cut-off frequency and the order of the necessary Butterworth type anti-aliasing filter? You may round the decibels to their first decimals.



**Viikkokoe 2/Week exam 2**

3. Geofyysikko ilmoittaa erääksi erittäin kiintoisaksi seismometrin aikatazon näytesekvenssiksi  $x(n)=[1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]$ . Sen spektristä tunnistamista varten määrität sen taajuustason esityksen amplitudi- ja vaihekuvaajat.

The geophysicist tells that  $x(n)=[1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]$  is a particularly interesting time domain sequence. For recognizing it from the spectrum you determine its frequency domain amplitude and phase diagrams.

4. Törmäät erään toisen seismisen signaalin mittauksessa käytetyn suodattimen siirtofunktioon alla. Selvität uteliaisena sen impulssivasteen.

You stumble on a transfer function below used in the measurements of another seismic signal. Out of curiosity you determine its impulse response.

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

### Viikkokoe 3/Week exam 3

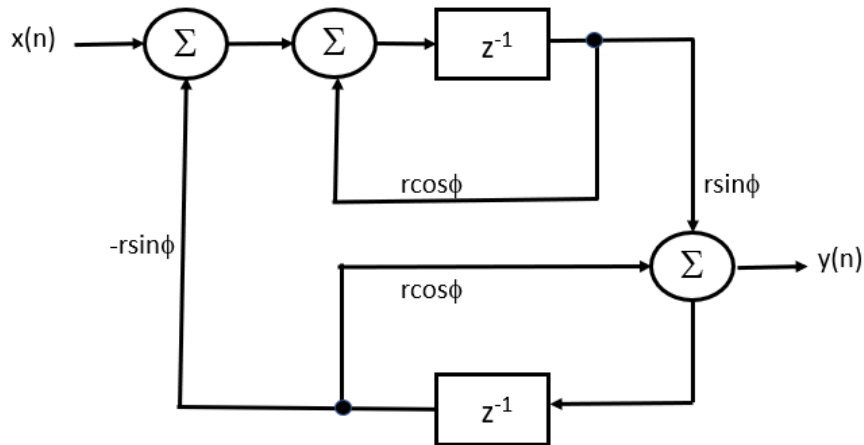
5. Erään matalataajuisen seismisen signaalin suodatuksen ajateltu siirtofunktio on alla. Selvitä sen amplitudi- ja vaihevasteet 0.125 Hz:n välein näytteistystaajuuteen 1 Hz. asti. Esitä amplitudivaste desibeleinä. Onko suodatin stabiili? Perustele.

The transfer function for filtering a low frequency seismic signal is below. Determine its amplitude and phase responses at 0.125 Hz intervals until the 1 Hz sampling frequency. Present the amplitude response in decibels. Is the filter stable? Justify.

$$H(z) = \frac{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.4z^{-1} + 0.9801z^{-2}}$$

6. Seismometrin aikadiskreettiin osuuteen sinun on ohjelmoitava seuraavan reaalisiaattorakenteen suodatin. Mikä on sen siirtofunktio? Millainen suodatin on kyseessä?

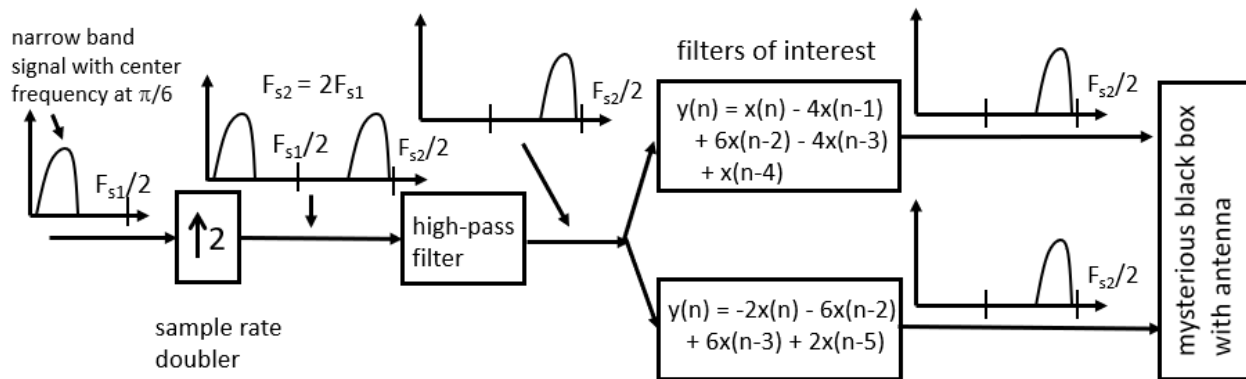
You are asked to write the software code for the following filter that resides in discrete time section of the seismometer. What is its transfer function? What kind of filter is it?



### Viikkokoe 4/Week exam 4

7. Saat selitettäväksi seuraavan tiimiläisiäsi epäilyttäneen suunnitelman. Kaaviossa on esitetty kunkin relevantin signaalin amplitudispektrit. Määritä sen viimeiseen lohkokon menevien signaalien keskitaajuuksien vaihe-ero (kahdella desimaalilla tai tarkka arvo). Kuvassa  $F_{s1} = 5$  Hz ja  $F_{s2} = 10$  Hz. Näynteistystaajuudella  $F_{s1}$  kiinnostavan kaistan keskitaajuus on  $\pi/6$ . Huomaa, että näynteistysnopeuden nosto tuo kuvastuksen esille.

You are tasked to explain the following design that has raised mixed feelings among your team members. The amplitude spectrum of each relevant signal is shown. Determine the phase difference (two decimals or full accuracy required) of the center frequency of the signals fed to the final block. In the figure  $F_{s1} = 5$  Hz and  $F_{s2} = 10$  Hz. At sampling frequency  $F_{s1}$  the center frequency of the interesting band is  $\pi/6$ . Notice that the increase of the sample rate brings the spectrum image visible



8. Ylläolevaan järjestelmään liittyen saat tehtäväksi suunnitella lineaarivaiheisen ylipäästösuodattimen, jonka estokaistan rajataajuus on  $f_s = 2$  Hz, päästökaistan raja  $f_p = 4$  Hz. Suodattimen on vaimennettava estokaistalla vähintään 40dB ja päästökaistan poikkeamat saavat olla suhteellisesti korkeintaan 0.003. Näynteistystaajuus on  $F_s = 10$  Hz. Käytä ikkunamenetelmää. Kolmen kertoimen määrittäminen riittää.

You are given the task of designing a linear phase high-pass filter for the above system with stopband frequency  $f_s = 2$  Hz and passband frequency  $f_p = 4$  Hz, which attenuates at least 40 dB in the stopband, while the passband ripple is below 0.003. The sampling frequency  $F_s = 10$  Hz. Use the window method. Determining three coefficients suffices.



## Viikkokoe 5/Week exam 5

9. Seismometrin mittauksiin todetaan kytkeytyneen sähköverkosta 50 Hz häiriön, joka on jatkotoimenpiteitä varten erotettava hyvin kapealla kaistanpäästösuodattimella, jonka kaistanleveydeksi sallitaan korkeintaan 2 Hz.

Suunnitellet tarkoitukseen rekursiivisen FIR-suodattimen. Näytteistystaajuuden sekä taajuusnäytteiden määrä ovat valittavissasi. Esitä siirtofunktio.

The measurements of the seismometer turn out to suffer from 50Hz interference that needs to be separated for further processing using a very narrow-bandpass filter. The filter to be realized for the experiments is allowed to possess max. 2 Hz bandwidth.

You design a recursive FIR filter for the purpose. It is up to you to select the sampling frequency and the number of frequency samples. Present the transfer function of your solution.

10. Seismometrin mittauksiin huomataan kytkeytyneen 50 Hz lisäksi myös 150 Hz häiriön. Niistä molemmat päätetään irrottaa ei-rekursiivisella taajuusnäytteistetyllä suunnitellulla FIR-suodattimella. Nyt tarvitusti kaistanleveydeksi todetaan 10 Hz.

Valitse näytteistystaajuus ja taajuusnäytteiden määrä ja laske suodattimelle vähintään kaksi kerrointa valitsemillasi taajuusnäytteillä.

Mitä taajuusnäytteet olisivat, jos tuloksena olisi oltava lineaarivaiheinen suodatin?

It is observed that the seismometer measurements contain both 50 Hz and 150 Hz interferences. It is decided that they should be separated with a non-recursive frequency sampling based FIR filter. Now the bandwidth is specified to be 10Hz.

Select the sampling frequency and the number of frequency samples, and calculate at least two coefficients for the filter using the frequency samples you select.

What would the frequency samples be in case a linear phase filter would be needed?

## Viikkokoe 6/Week exam 6

11. Eräässä seismometrin suunnitelmassa on 40 Hz:n näytteistystaajuudella toimiva digitaalinen FIR *ylipäästösuodatin*, tulee vaimentaa estokaistalla 5 Hz:n kohdalla vähintään 30 dB. Saat HW-suunnittelijan pyynnöstä tehtäväksesi tarkistaa, riittääkö estokaistan vaimennus, jos suodattimen kertoimet kvantisoidaan kahdeksan bittiksi. Suodattimen differenssiyhtälö on alla.

A design for the seismometer includes a digital FIR filter that operates at 40 Hz sampling rate and is required to attenuate at least 30 dB in its stopband at 5 Hz. The hardware designer asks you to verify the sufficiency of the stopband attenuation if the coefficients of the filter are quantized to 8 bits. The difference equation of the filter is below.

$$y(n) = 0.1667 * x(n) - 0.4024 * x(n-1) + 0.4024 * x(n-2) - 0.1667 * x(n-3)$$

12. Seismometrin testeriin tarvitaan aikadiskreetti digitaalinen alipäästösuodatin, jonka impulssivaste vastaa vaimenevaa siniaaltoa, jonka s-tason aikajatkuva esitys on yhtälössä (1).

Plaraat hetken matematiikan peruskurssin materiaaleja ja toteat vastaavan aikajatkuvan impulssivasteen olevan yhtälön (2) muotoa. Mikä on halutun impulssivasteen omaavan aikadiskreetin suodattimen siirtofunktio  $H(z)$ ?

The testing device of the seismometer needs a discrete time digital low pass filter with impulse response that corresponds to damped sine wave. Its s-plane continuous time representation is in Equation (1).

After checking the materials of your basic calculus course, you notice that the respective continuous time impulse response is of the form in Equation (2). What is the transfer function  $H(z)$  of the discrete time filter that has the desired impulse response?

$$H(s) = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} \quad (1)$$

$$h(t) = e^{-at} \sin(\omega t) = L^{-1}(H(s)) \quad (2)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx}) \quad (3)$$

Tehtävän voi luonnollisesti ratkaista myös osamurtohajotelmaksi purkamisen kautta muistaen  
The problem can naturally be solved through partial fractions expansion by recognizing

$$e^{-bt} = L^{-1}\left(\frac{1}{s + b}\right) \quad (4)$$

### Viikkokoe 7/Week exam 7

13. Seismometriin tarvitaan vielä Butterworth -suodattimen kaltaisesti käyttäytyvä digitaalinen alipäästösuodatin (maksimaalisen tasainen ja monotoninen vaste). Suodattimen on täytettävä alla olevat vaatimukset. Mikä on suodattimen siirtofunktio? Käytät suunnitteluun bilineaarista  $z$ -muunnosta.

The seismometer needs a digital low-pass filter with Butterworth response characteristics (maximally flat and monotonous). The filter needs to satisfy the requirements below: What is the transfer function of the filter? You naturally use the bilinear  $z$ -transform method.

Päästökaistan raja/Passband edge 1 Hz

Estokaistan raja/Stopband edge 4 Hz

Estokaistan vaimennus vähintään/Stopband attenuation at least 20 dB

Näytteistystaajuus/Sampling frequency 10 Hz

14. Seismometriin joudutaan viime hetken muutoksena toteuttamaan IIR-suodatin. Toteutus tehdään kiinteän pisteen laskennalla 16 bitin sananpituudella. Akkurekisterin pituus on 32 bittiä. Toteutettavalle siirtofunktiolle on haettu kaksi alla esitettyä muotoa toteutuksen pohjaksi.

Esitä suodattimella suora (yksi lohko) ja kaskadirealisaatio, jälkimmäinen perustuen ns. kahden kanonisen lohkon (tunnetaan myös käsitteellä Direct Form II) käyttöön. Vertaile realisaatioitasi pyörityksistä aiheutuvan kvantisointikohinan perusteella. Osoita perustellen mielestäsi parempi toteutus.

When the seismometer is being tested, a last minute change of adding an IIR filter is found mandatory. It will be implemented using fixed point 16 bit arithmetic, while the accumulator register has 32 bits. Two alternative transfer function formulations shown below are given for the filter.

Present direct structure (single block) and cascade realizations for the filter, the latter based on two canonic blocks (also known as Direct Form II). Compare your realizations based on their round-off noise characteristics. Justify, which implementation is better.

$$H(z) = \frac{1 + 0.67z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} \frac{1 - 0.67z^{-1}}{1 - 0.875z^{-1} + 0.09375z^{-2}}$$

$$= \frac{1 - 1.4489z^{-2} + 0.67z^{-3}}{1 - 1.875z^{-1} + 1.46875z^{-2} - 0.53125z^{-3} + 0.046875z^{-4}}$$

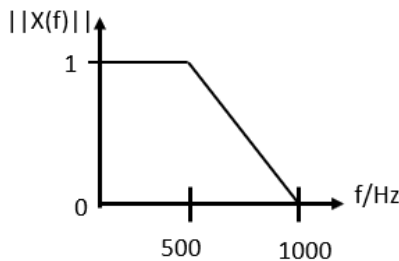
### Viikkokoe 8/Week exam 8

15. Seismometrin eräässä lopputestauksessa käytetään alla olevan kuvan spektrin omaavaa 3 kHz taajuudella näytteistettyä signaalia, jonka kiinnostava kaista ulottuu 500 Hz:iin saakka. Sen näytteistystaajuus on kuitenkin muutettava 2 kHz:ksi.

Esitä tarvittavan näytteistysnopeuden muuntimen lohkokaavio ja hahmottele signaalin spektri kussakin muunnosketjun vaiheessa (jokaisen lohkon jälkeen) kulloiseenkin Nyquistin taajuuteen asti.

The final testing procedure of the seismometer employs the signal with the spectrum below, sampled at 3 kHz rate. The interesting band extends to 500 Hz. For further processing its sampling rate is reduced to 2 kHz.

Present a block diagram for the needed sample rate converter and sketch the spectrum of the signal at each stage of the conversion chain (after each block) until each relevant Nyquist frequency.



16. Saat lopuksi tehtäväksi suunnitella ratkaisun, joka nostaa erään testausignaalin näytteistystaajuuden 5 Hz:tä 45 Hz:iin kahdessa vaiheessa tarvitte mahdollisimman vähän laskentaa. Sen varsinainen kiinnostava kaista on  $[0, 2]$  Hz.

Näytteistystaajuuden nostaminen saa lisätä kiinnostavan kaistan rippeliä korkeintaan 0.05 dB ja kuvastumisten on vaimennuttava vähintään 47 dB.

Kuinka suuren laskentatehon tarvitset? Tarvittavat suodattimet suunnitellaan sopivia ikkunafunktioita käyttäen.

Finally, you are given the task to design a solution that increases the sampling rate of a test signal from 5 Hz to 45 Hz in two stages using least computation effort. The actual interesting band of the signal is  $[0, 2]$  Hz.

The increase of the sampling rate is allowed to increase the ripple in the interesting band by at most 0.05 dB while the imaging frequencies must be attenuated by at least 47 dB.

How much computing power do you need? The necessary filters are designed using suitable window functions.

$$\|H(f)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

Type	$\Delta f$	$A_p$ (dB)	$A_s$ (dB)	Window function
Rectangle	$0.9/N$	0.7416	21	1
Hanning	$3.1/N$	0.0546	44	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
Kaiser	$2.93/N$ ( $\beta=4.54$ ) $4.32/N$ ( $\beta=6.76$ ) $5.71/N$ ( $\beta=8.96$ )	0.0274 0.00275 0.000275	50 70 90	$\frac{I_0(\beta\{1 - [2n/(N-1)]^2\}^{1/2})}{I_0(\beta)}$

Filter type	Ideal impulse response, $h_D(n)$	
	$h_D(n), n \neq 0$	$h_D(0)$
Lowpass	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Highpass	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
Bandpass	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
Bandstop	$2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} = H_1(z)H_2(z)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N}$$