

**Important information:****This heap of paper contains two participation options**

- 1. Final exam (2 pages):** your final grade will depend on these exam points. In addition, you need to return all the laboratory exercises by 31.7.2016. If you have participated the week exams, a higher final exam grade will replace your earlier grade.
- 2. Re-take of week exams (patching, 7 pages):** the higher points earned now will replace your respective earlier week exam points on problem by problem basis. In addition, you need to return all the laboratory exercises by 31.7.2016.

In addition, useful tables, formulas, and week exam results listing are included in the end.

## DIGITAALISET SUODATTIMET 521337A (DIGITAL FILTERS)

Loppuentti/Final exam 17.3.2016

If you have participated the week exams, consider first the re-take option!  
 Jos olet osallistunut viikkotentteihin, harkitse ensin paikkausvaihtoehtoa!

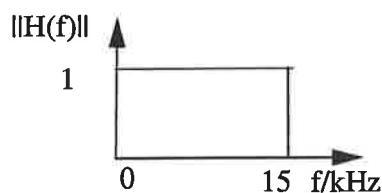
Taulukoita ja kaavoja viimeisillä sivuilla  
 Tables and formulas on the last pages

1. Erään laitteen näytteistystaajuus on 50kHz kiinnostavan kaistan ulottuessa 15kHz:iin kuvan 1 mukaisesti. Signaali muunnetaan analogiseksi 0-kertaluokan pitoa käyttäen ja suodatetaan 2 kertaluvun Butterworth -alipäästösuodattimella, jonka cut-off taajuus on  $f_c=17\text{Hz}$ .

The internal sampling rate of a device is 50kHz, while the interesting band extends to 15kHz as shown in Figure 1. The signal is converted to analog domain using 0-order hold and is filtered using a 2nd order Butterworth low-pass filter that has cut-off frequency  $f_c=17\text{Hz}$ .

- 1a. Piirrä signaalin spektrit A/D-muunnoksen ja suodatuksen jälkeen 100 kHz asti (2p)  
 Sketch the spectra of the signal after A/D-conversion and filtering till 100kHz.

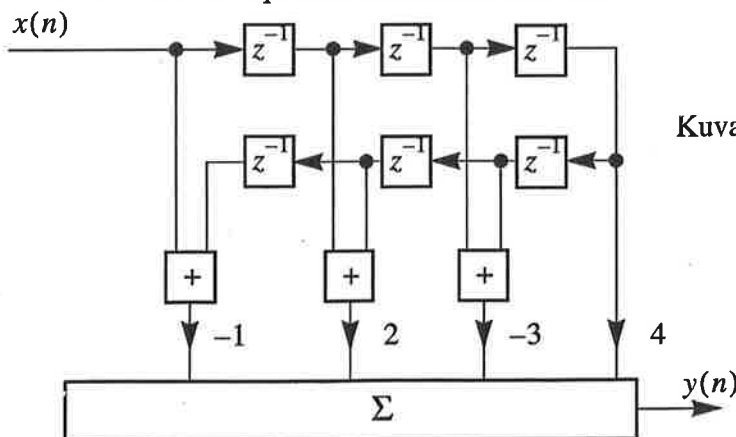
- 1b. Kuinka monta desibeliä vaimentuu alin kuvastuva taajuus? (3p)  
 How much in decibels is the lowest imaging frequency attenuated?



Kuva 1/Figure 1

2. Saat tehtäväksesi toteuttaa kuvan 2 suodattimen ohjelmallisesti. Sitä varten muodosta sen differenssiyhtälö ja siirtofunktio. (3p)

You are asked to write a software implementation for the filter in Figure 2. For that purpose determine the difference equation and transfer function



Kuva 2/Figure 2

3. Näet seuraavan selvästi impulssi-invariantilla menetelmällä suunnitellun digitaalisen suodattimen. Mikä onkaan vastaavan aikajatkuvan suodattimen siirtofunktio? (4p)

You notice the following digital filter that has clearly been designed using the impulse invariant method. What is the transfer function of the respective continuous time filter?

$$H(z) = \frac{1.5z}{z - e^{-0.8}} + \frac{2z}{z - e^{-1.8}} \quad (\text{You may assume/voit olettaa } T=1)$$

4. Toteuta digitaalinen taajuusnäytteistystekniikalla suunniteltu reaalikertoiminen rekursiivinen FIR-kaistanpäästösuodatin, jonka max. 2500Hz levyinen päästökaista on taajuudella 5000Hz. Näytteistystaajuuden sekä taajuusnäytteiden määrän saat valita itse. Määritä suodattimesi amplitudivaste ja arvioi sen perusteella suunnittelutulosta. (Kannattaa aivan varmasti heti alkuun piirtää yksikköympyrä) (4p)

You are given the task to use frequency sampling method to implement a recursive bandpass FIR filter with real coefficients with at most 2500Hz wide passband at 5000Hz. You can select the sampling frequency and the number of frequency samples. Determine the magnitude response of your filter and based on it judge the filter performance. (You may find unit circle useful to get started).

5. Saat tehtäväksesi suunnitella ratkaisun, joka nostaa erään signaalin näytteistystaajuuden 6kHz:tä 48 kHz:iin kahdessa vaiheessa. Sen varsinainen kiinnostava kaista on [0, 2.4] kHz. Toteutuksen on oltava laskennallisesti mahdollisimman tehokas. Näytteistystaajuuden nostaminen saa lisätä kiinnostavan kaistan rippeliä korkeintaan 0.05 dB ja kuvastumisten on vaimennuttava vähintään 47 dB. Kuinka suuren laskentatehon tarvitset? Tarvittavat suodattimet suunnitellaan sopivia ikkunafunktioita käyttäen.

You are given the task to design a solution that increases the sampling rate of a signal from 6kHz to 48 kHz in two stages. The actual interesting band of the signal is [0, 2.4] kHz. Computationally the implementation must be as efficient as possible. The increase in sampling rate is allowed to increase the ripple in the interesting band by at most 0.05 dB while the imaging frequencies must be attenuated by at least 47 dB. How much computing power do you need at least? The necessary filters are designed using suitable window functions.

**DIGITAALISET SUODATTIMET 521337A (DIGITAL FILTERS)**  
**Week exam re-takes/Viikkotenttien uusinnat 17.3.2016**

**Uusinnan periaatteet/the re-take scheme:**

Uusinnoista saadut pisteet korvaavat aiemmat tehtävä tehtävältä henkilökohtaisella pistetililläsi. Ensimmäinen tehtävä vastaa aiemman viikkotentin 1 ensimmäistä tehtävää, toinen toista, jne. Voit tarkistaa tilanteesi viikkotenttien tulostililtä. Lopullisessa arvostelussa otetaan huomioon seitsemän parasta viikkotenttiä kahdeksasta [tämä periaate on tarkoitettu poissaolon kompensoimiseen]. Kuitenkin viikkotenttien 1-4 ja 5-8 pistekertymien on ennen tätä valintaa erikseen oltava vähintään 12 pistettä.

The points from this re-take replace the earlier points problem by problem on your individual point account. The first problem corresponds to the first problem of the earlier Week exam 1, etc. You can check your situation from the week exam results sheet. The final grading takes into account seven best week exam results out of the total eight [this principle is to compensate for an absence]. However, you need to have accumulated at least 12 points from both week exam sets 1-4 and 5-8 before that step.

**Viikkotenttien uusinnat vs. lopputentti? Miten valitsisin?**  
**Week exam retakes or the final exam? How should I choose?**

Arvioit itse, kumpi menettely on oppimisesi ja loppuarvosanasi kannalta parempi.

It is up to you to decide which approach is better from the point of view of your learning outcomes and final grade.

**Tehtävien taustaksi/for the background of the problems:**

Pääset toteuttamaan yleiskäyttöistä tiedonkeruulaitetta, jota voidaan käyttää tallentamaan ympäristöstä tulevaa laajakaistaisen anturin dataa. Laitteessa on myös analoginen lähtö, jota kautta tallennetta voidaan syöttää esim. kuulokkeisiin,.

You get an opportunity to participate in the design of a general purpose data-logger that can be employed in storing data coming from the environment through a large bandwidth sensor. The device has also an analog output that enables feeding the stored signal, e.g., to a headset.

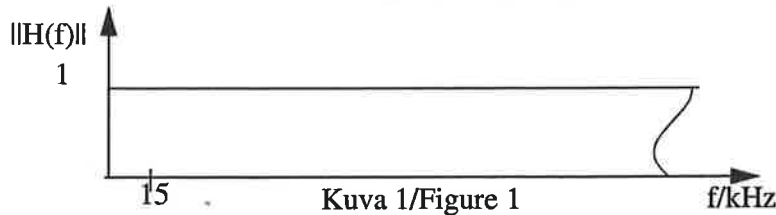
**Taulukoita ja kaavoja viimeisillä sivuilla**  
**Tables and formulas on the last pages**

## Week exam 1/Viikkotentti 1

1. Mitattavan laajakaistaisen analogisen signaalin amplitudispektri on kuvassa 1. Korkein kiinnostava taajuus on 15kHz. Tämä aikajatkuva signaali näytteistetään 8-bittiseksi aikadiskreetiksi signaaliksi käyttäen laskostumisenestoon 4. kertaluvun Sallen-Key -rakenteista Butterworth-alipäästösuodatinta, joka vaimentaa kiinnostavaa kaistaa korkeintaan 1dB.

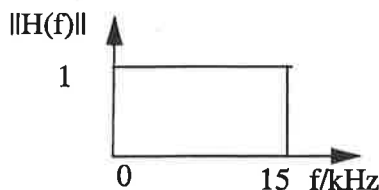
The highest interesting frequency of the measured wideband time continuous signal (amplitude spectrum in Figure 1) is 15kHz. This signal is sampled into an 8-bit time discrete signal, while using a 4th order Butterworth-type Sallen-Key structured low-pass filter for anti-aliasing. The filter attenuates at most 1dB in the interesting band.

- 1a. Piirrä signaalin spektrit sekä näytteistystyksen että laskostumisenestosuodatuksen jälkeen kaksinkertaiseen näytteistystaajuuteen asti ( $=2F_s$ ).  
Sketch the spectra of the signal both after sampling and anti-aliasing filtering till double sampling frequency ( $=2F_s$ ).
- 1b. Mikä on alin järkevä näytteistystaajuus laskostumisen kannalta?  
What is the lowest reasonable sampling frequency from the aliasing point of view?



2. Laitteen sisäinen näytteistystaajuus on digitaalisen esikäsittelyn jälkeen 50kHz kiinnostavan kaistan ulottuessa 15kHz:iin kuvan 2 mukaisesti. Signaali muunnetaan analogiseksi 0-kertaluvun pitoa käyttäen ja suodatetaan 2 kertaluvun Butterworth -alipäästösuodattimella, jonka cut-off taajuus on  $f_c=17\text{Hz}$ .  
The internal sampling rate of the device is 50kHz after digital preprocessing, while the interesting band extends to 15kHz. The signal is converted to analog domain using 0-order hold and is filtered using a 2nd order Butterworth low-pass filter that has cut-off frequency  $f_c=17\text{Hz}$ .

- 2a. Piirrä signaalin spektrit A/D-muunnoksen ja suodatuksen jälkeen 100 kHz asti.  
Sketch the spectra of the signal after A/D-conversion and filtering till 100kHz.
- 2b. Kuinka monta desibeliä vaimentuu alin kuvastuva taajuus?  
How much in decibels is the lowest imaging frequency attenuated?



## Viikkotentti 2/Week exam 2

3. Erääseen kohtaan tiedonkeruulaitteen signaalinkäsittelyketjua on sijoitettu erikoinen impulssivaste [2 1 0 0 1 2]. Laske sille DFT ja esitä sen amplitudi- ja vaihespektrit.

A position in the signal processing chain of the data-logger you notice a peculiar impulse response [2 1 0 0 1 2]. Calculate its DFT and plot its amplitude and phase spectra.

4. Seuraavalla kaistanpäästösuodattimelle halutaan suodattaa erilleen erityisen kiintoisa osa signaalista. Laske sen siirtofunktion impulssivaste (kolme termiä riittää). Perustele, onko järjestelmä stabiili.

The following band-pass filter is intended to extract apart a particularly interesting component of the signal. Calculate the impulse response of its transfer function (three coefficients suffice). Explain whether the system is a stable one.

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-8})(z^{-2} - 2z^{-1} + 1)}{1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}}$$

## Viikkotentti 3/Week exam 3

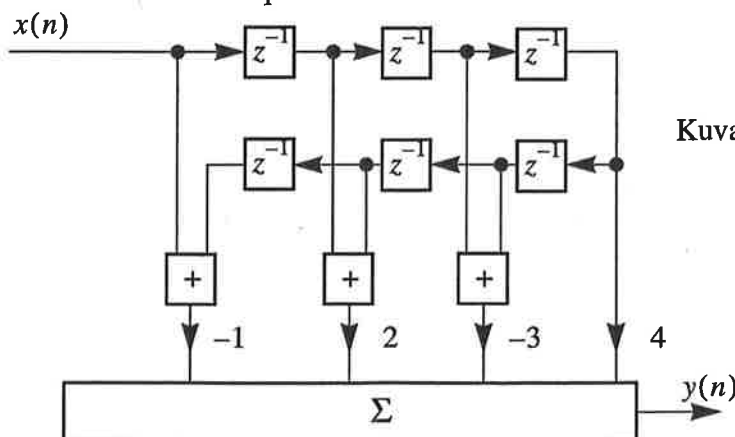
5. Eräässä käsittelyketjun haarassa halutaan eliminoida matalia taajuuksia seuraavalla ylipäästösuodattimella. Piirrä sen nolla-napa-diagrammi ja määritä amplitudi- ja vaihevasteet  $\pi/4$  välein taajuusvälillä  $[0, 2\pi]$ .

In a branch of the processing chain it is necessary to eliminate the low frequencies using the following high-pass filter. Plot its zero-pole diagram and determine the amplitude and phase response at  $\pi/4$  intervals in the frequency range  $[0, 2\pi]$ .

$$H(z) = \frac{z - 1}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}$$

6. Saat tehtäväksesi toteuttaa kuvan 3 suodattimen ohjelmallisesti. Sitä varten muodosta sen differenssiyhtälö ja siirtofunktio.

You are asked to write a software implementation for the filter in Figure 3. For that purpose determine the difference equation and transfer function



## Viikkotentti 4/Week exam 4

7. Tiedonkeruulaitteen eräässä osassa on äärimmäisen tärkeätä, että kaikki taajuudet viivästyvät ajassa saman verran. Saat valita tuohon kohtaan ehdolla olevista kahdesta siirtofunktiosta tämän ehdon täyttävän.

In a particular stage of the data-logger it is of extreme importance that all the frequencies are delayed exactly the same amount in time. For that part you are given the task to select from two transfer functions the one that fulfills this requirement.

$$H_1(z) = -1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} + z^{-4}$$

$$H_2(z) = -1 + 2z^{-1} + z^{-2} - 2z^{-3} + z^{-4}$$

- 7a. Perustele, kumman valitset.

Explain, which one you select.

- 7b. Esitä ja piirrä valitsemasi siirtofunktion vaihe- ja amplitudivasteet.

Present and plot the phase and magnitude responses of your transfer function

8. Tiedonkeruulaitteen digitaaliseen esikäsittelyosaan vaaditaan digitaalinen FIR-alipäästösuodatin, jonka spesifikaatiot ovat seuraavat:

The digital preprocessing stage of the data-logger demands a digital FIR filter with the following specifications:

Näytteistystaajuus/sampling frequency	$F_s = 100 \text{ kHz}$
Päästökaistan rajataajuus/passband edge frequency	$f_p = 15 \text{ kHz}$
Estokaistan rajataajuus/stopband edge frequency	$f_s = 25 \text{ kHz}$
Estokaistan vaimennus/Stopband attenuation	$A_s > 43 \text{ dB}$
Päästökaistan rippeli/ripple in passband	$A_p < 0.02 \text{ dB}$

- 8a. Mitkä ikkunafunktiot täyttävät vaatimukset?

Which window functions would meet the specifications?

- 8b. Suunnittele suodattimen toteutus ikkunamenetelmällä ja laske suodattimelle kolme kerrointa. Käytä ikkunaa, jonka ominaisuudet ovat lähimpänä vaatimuksia ja täyttävät ne.

Design the filter using window method and determine three coefficients for the filter. Use the window that is the closest to the specifications and meet them.

**Viikkotentti 5/Week exam 5**

9. Osa tiedonkeruulaitteen laskennasta tehdään heikkotehoisella mikrokontrollerilla. Sitä varten sinun on toteutettava digitaalinen taajuusnäytteistystekniikalla suunniteltu reaalikertoiminen rekursiivinen FIR-kaistanpäästösuodatin, jonka max. 2500Hz levyinen päästökaista on taajuudella 5000Hz. Näytteistystaajuuden sekä taajuusnäytteiden määrän saat yllättäin valita itse. Määritä suodattimesi amplitudivaste ja arvioi sen perusteella suunnittelutulosta. (Kannattaa aivan varmasti heti alkuun piirtää yksikköympyrä)

You are given the task to use frequency sampling method to implement a recursive bandpass FIR filter with real coefficients with at most 2500Hz wide passband at 5000Hz. Surprisingly, you can select the sampling frequency and the number of frequency samples. Determine the magnitude response of your filter and based on it judge the filter performance. (You may find the unit circle useful to get started...).

10. Projektipäällikkösi tulee toisiin ajatuksiin ja tehtävän 9 suodatin päätetäänkin toteuttaa toteuttaa ei-rekursiivisella digitaalisella FIR-suodattimella. Tämänkin suodattimen on tietysti oltava reaalikertoiminen. Laske ainakin kolme kerrointa tällaiselle suodattimelle.

Your project manager changes his mind and the filter of problem 9 will after all be implemented using a non-recursive digital FIR filter. Even this filter must have real coefficients. Calculate at least three of the coefficients.

**Viikkotentti 6/Week exam 6**

11. Pääset osoittamaan kykysi kvantisoimalla tiedonkeruulaitteen erään digitaalisen FIR-alipäästösuodattimen kertoimet. Sen differenssiyhtälö on esitetty alla. Kun suodatin toteutetaan kiinteän pisteen laskennalla 2-komplementtiaritmetiikalla, kuinka monen bitin esitystarkkuus riittää, jotta päästökaistan rippeli ei kasva yli 0.5 dB? Määritä ko. tarkkuudella toteutetun suodattimen amplitudivaste taajuuksilla  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  ja  $2\pi$ .

You get the opportunity to show your skills by quantizing the coefficients of a digital FIR filter in the data-logger. The difference equation is given below. When it filter is implemented using fixed point 2's complement arithmetics, how many bits of precision suffices to keep the increase of passband ripple below 0.5B? Determine the amplitude response of the filter implemented at that precision at frequencies  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  and  $2\pi$ .

$$y(n)=0.170135*x(n)+0.410671*x(n-1)+0.410671*x(n-2)+0.170135*x(n-3)$$

12. Näet laitteeseen sisällytetyn seuraavan selvästi impulssi-invariantilla menetelmällä suunnitellun digitaalisen suodattimen. Mikä onkaan vastaavan aikajatkuvan suodattimen siirtofunktio?

The device includes the following digital filter that has clearly been designed using the impulse invariant method. What is the transfer function of the respective continuous time filter?

$$H(z) = \frac{1.5z}{z - e^{-0.8}} + \frac{2z}{z - e^{-1.8}} \quad (\text{You may assume/voit olettaa } T=1)$$



## Viikkotentti 7/Week exam 7

13. Tiedonkeruulaitteeseen tarvitaan vielä tarvitaan Butterworth -suodattimen kaltaisesti käyttäytyvä digitaalinen alipäästösuodatin (maksimaalisen tasainen ja monotonisesti käyttäytyvä vaste). Suodattimen on täytettävä alla olevat vaatimukset. Mikä on suodattimen siirtofunktio? Käytät tietenkin bilineaarista z-muunnosta.

The data-logger needs a digital lowpass filter with Butterworth response characteristics (maximally flat and monotonous). The filter needs to satisfy the requirements below: What is the transfer function of the filter? Use the bilinear z-transform method.

Päästökaista/Passband 0-5kHz

Estokaista/Stopband 8-25kHz

Stopband attenuation at least 20 dB

Sampling frequency 50kHz

14. Laitteeseen joudutaan viime hetken muutoksena toteuttamaan digitaalinen IIR-suodatin. Tarjolla on hintsusti laskentatoteutusta, joten toteutus on tehtävä kiinteän pisteen laskennalla. Toteutettavalle siirtofunktiolle haetaan kaksi alla esitettyä muotoa toteutuksen pohjaksi. Esitä suodattimen rinnakkais- ja kaskadirealisaatiot, jotka perustuvat kanonisten lohkojen (ns. Direct Form II) käyttöön. Vertaile realisaatioitasi laskennallisten ominaisuuksien perusteella. Esitä mielestäsi paras toteutus.

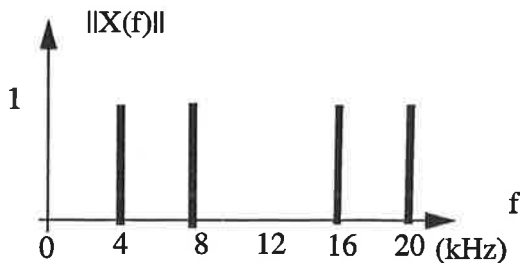
When the device is being tested, a last minute change of adding a digital IIR filter is found mandatory. Due to the scarce computing resources it has to be implemented using fixed point representation. Two alternative formulations shown below are designed for the filter. Present both parallel and cascade realizations for the filter based on canonic blocks (Direct Form II). Compare your realizations based on their computational characteristics. Which realization you consider the best one?

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1.5-1.75z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} + \frac{1.5-0.25z^{-1}}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}} - \frac{6+z^{-1}}{1+0.25z^{-2}} + 4 \\
 &= \frac{(1+z^{-2})(1-0.25z^{-2})(1-z^{-2})}{(1-z^{-1}+0.5z^{-2})(1+z^{-1}+0.5z^{-2})(1+0.25z^{-2})}
 \end{aligned}$$

## Viikkotentti 8/Week exam 8

15. Laitteen eräistä sisäistä toimintoa testataan kuvan 4 spektrin omaavalla 12kHz taajuudella näytteistetyllä digitaalisella signaalilla. Jatkoanalyysia varten sen näytteistystaajuus on muutettava 10 kHz:ksi. Piirrä tarvittavan näytteistysnopeuden muuntimen lohkokaavio ja hahmottele signaalin spektri kussakin muunnosketjun vaiheessa (jokaisen lohkon jälkeen) kulloiseenkin Nyquistin taajuuteen asti.

An internal functionality of the device is tested using a 12kHz sampling rate digital signal that has the spectrum of Figure 4 below. For further processing its sampling rate is reduced to 10kHz. Draw a block diagram of the needed sample rate converter and sketch the spectrum of the signal at each stage of the conversion chain (after each block) until each relevant Nyquist frequency.



Kuva 4/Figure 4

16. Saat lopuksi tehtäväksesi suunnitella ratkaisun, joka nostaa erään signaalin näytteistystaajuuden 6kHz:tä 48 kHz:iin kahdessa vaiheessa. Sen varsinainen kiinnostava kaista on  $[0, 2.4]$  kHz. Toteutuksen on oltava laskennallisesti mahdollisimman tehokas. Näytteistystaajuuden nostaminen saa lisätä kiinnostavan kaistan rippeliä korkeintaan 0.05 dB ja kuvastumisten on vaimennuttava vähintään 47 dB. Kuinka suuren laskentatehon tarvitset? Tarvittavat suodattimet suunnitellaan sopivia ikkunafunktioita käyttäen.

Finally, you are given the task to design a solution that increases the sampling rate of a signal from 6kHz to 48 kHz in two stages. The actual interesting band of the signal is  $[0, 2.4]$  kHz. Computationally the implementation must be as efficient as possible. The increase in sampling rate is allowed to increase the ripple in the interesting band by at most 0.05 dB while the imaging frequencies must be attenuated by at least 47 dB. How much computing power do you need at least? The necessary filters are designed using suitable window functions.

## TABLES AND FORMULAS

$$\|H(f)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

))

Type	$\Delta f$	$A_p$ (dB)	$A_s$ (dB)	Window function
Rectangle	$0.9/N$	0.7416	21	1
Hanning	$3.1/N$	0.0546	44	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
Kaiser	$2.93/N$ ( $\beta=4.54$ ) $4.32/N$ ( $\beta=6.76$ ) $5.71/N$ ( $\beta=8.96$ )	0.0274 0.00275 0.000275	50 70 90	$\frac{I_0(\beta\{1 - [2n/(N-1)]^2\}^{1/2})}{I_0(\beta)}$

Filter type	Ideal impulse response, $h_D(n)$	
	$h_D(n), n \neq 0$	$h_D(0)$
Lowpass	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Highpass	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
Bandpass	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
Bandstop	$2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} = H_1(z)H_2(z)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N}$$

$$\omega'_p = k \tan(\omega_p T/2)$$

$$s = k \frac{(z-1)}{z+1}$$

LPF → LPF:

$$s = s/\omega'_p$$

LPF → HPF:

$$s = \omega'_p/s$$

LPF → BPF:

$$(s^2 + \omega_0^2)/Ws$$

LPF → BSF:

$$Ws/(s^2 + \omega_0^2)$$

$$\omega_0^2 = \omega'_1 \omega'_2, W = \omega'_2 - \omega'_1$$

$f$	$\mathcal{L}(f) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2$	$\frac{2!}{s^3}$
$t^n$ ( $n = 1, 2, \dots$ )	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$	