

Sähkö- ja tietotekniikan osasto

Digitaaliset suodattimet: tentti 21.5.2010.

Huom: tentissä sallitaan ns. laillinen luntta (A4-kokoinen, käsin kirjoitettu, molemmat puolet voi käyttää).

Tentissä voi uusia tämän kevään viikkotenttejä. Vaihtoehtoina on tehdä ensimmäiset viisi tehtävää jotka korvaavat ensimmäisen puoliskon viikkotenteistä, tehtävät 6-9 jotka korvaavat jälkimmäisen puoliskon viikkotenteistä tai tentin lopussa olevan 8. viikkotentin.

Jos tehtävässä tarvitaan IIR-suodattimen impulssivaste niin kolmen ensimmäisen nolasta poikkeavan kertoimen laskeminen riittää.

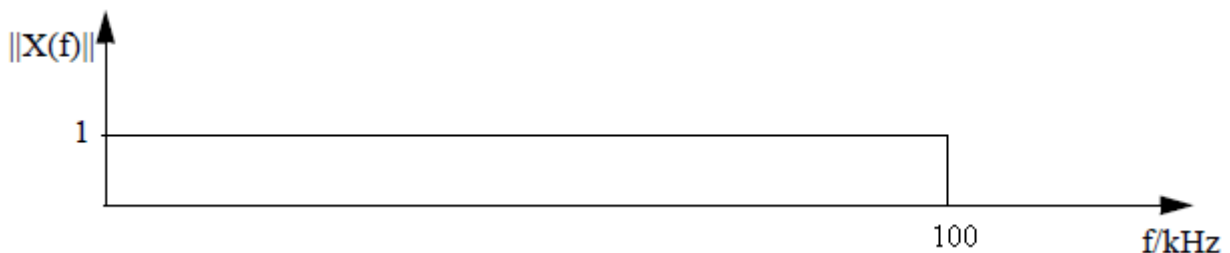
If you need the impulse response of an IIR filter, the first three non-zero coefficients will suffice.

1. Kuvan 1 aikajatkuvan signaalin kiinnostava kaista on 5-25 kHz. Signaalille tehdään A/D-muunnos 100kHz näytteistystaajuudella. Laskostumisen estoon käytetään Butterworth -tyyppistä alipäästösuodatinta. Laskostumisenestosuodattimen on vaimennettava laskostuvia taajuuksia vähintään 50dB ja kiinnostava kaista saa vaimentua korkeintaan 2dB.

The interesting band of the signal in Figure 1 is 5-25 kHz. The signal is sampled at 100kHz frequency. A Butterworth type low pass filter is used as an anti-aliasing filter. The anti-aliasing filter must attenuate the aliasing frequencies at least 50dB and the interesting band can be attenuated 2dB.

a. Mikä on suodattimen asteluku ja cut-off-taajuus? What are the order and the cut-off frequency of the filter? (2p)

b. Piirrä järjestelmän lohkokaavio ja signaalin spektri jokaisen lohkon jälkeen. Draw a block diagram of the system and sketch the spectrum of the signal after each block. (1p)



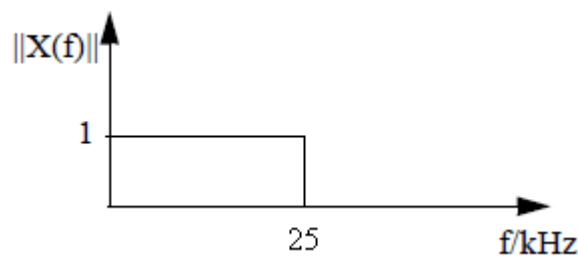
Kuva/Figure 1

2. Kuvan 2 digitaalinen signaali, jonka näytteistystaajuus on 100 kHz, muunnetaan aikajatkuvaksi 0-kertaluvun pitoa käyttäen. Kuvastuvia taajuuksia vaimentaa Butterworth-tyyppinen alipäästösuodatin, jonka astelukku on 2 ja cut-off-taajuus on 25 kHz.

The digital signal of which sampling frequency is 100 kHz is in Figure 2. The signal is converted to a time-continuous signal using zero-order hold. A Butterworth type low-pass filter is used as an anti-imaging filter. The order of the filter is 2 and the cut-off frequency is 25 kHz.

a. Piirrä järjestelmän lohkokaaevio ja signaalin spektri jokaisen lohkon jälkeen. Draw a block diagram of the system and sketch the spectrum of the signal after each block. (1p)

b. Kuinka paljon alin kuvastuva taajuus vaimenee järjestelmän lähdössä? How much is the lowest image frequency attenuated at the output of the system? (1p)



Kuva/Figure 2

3. Laske sekvenssin $x(n) = [0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0]$ diskreetti Fourier-muunnos. Piirrä sekvenssin amplitudi- ja vaihespektri. Miten spektrin kuvaajat muuttuisivat jos Fourier-muunnos olisi neljä kertaa pitempi (eli sekvenssin loppuun lisättäisiin 18 nollaa)? (2p)

Determine the discrete Fourier transform of the sequence $x(n) = [0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0]$. Plot the amplitude and phase spectrum. How would the plot change if you would take a four times longer Fourier transform (if 18 zeros were padded at the end of the sequence)?

4. Määritä suodattimen $H(z) = \frac{0,4208+0,4208z^{-2}}{1+0,1584z^{-2}}$ taajuusvaste $\frac{\pi}{2}$ välein taajuuteen 2π asti. Laske suodattimen impulssivaste. (2p)

Determine the impulse response and the frequency response of the filter $H(z) = \frac{0,4208+0,4208z^{-2}}{1+0,1584z^{-2}}$ at $\frac{\pi}{2}$ intervals till 2π .

5. Suunnittele seuraavat spesifikaatiot täyttävä digitaalinen FIR-suodatin ikkunamenetelmää käyttäen. Laske suodattimen kolme ensimmäistä kerrointa (ideaalisen suodattimen impulssivasteen indekseillä 0,1 ja 2). (3p)

Design a digital FIR filter using the window method. Calculate the first three coefficients (using the indices 0, 1 and 2 for the ideal impulse response) of the filter. The specifications of the filter are the following:

- Päästökaista/passband: 5-25 kHz
- Estokaista/stopband: 0-2 kHz
- Näytteistystaajuus/sampling frequency 50kHz
- Päästökaistan rippeli/ripple of the passband: $<0,124\text{dB}$
- Estokaistan vaimennus/attenuation at the stopband: $>48,01\text{dB}$

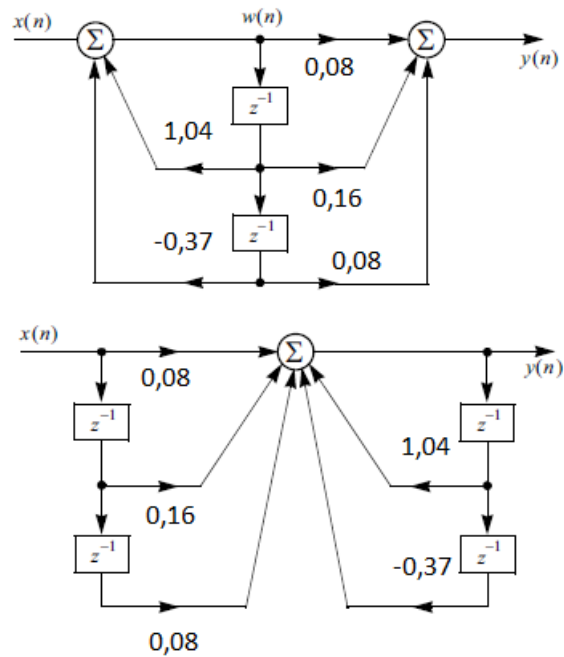
Ensimmäinen osa loppuu. End of part one.

6. Digitaalinen FIR-suodatin $h(n) = [0,2510; 0; 0,6715; 0; 0,2510]$ kvantisoidaan 5 bitin tarkkuuteen. Laske kvantisoidun suodattimen kertoimet. Laske kvantisoidun suodattimen virhe desibeleinä verrattuna alkuperäiseen suodattimeen taajuudella π . (3p)

A digital FIR filter $h(n) = [0,2510; 0; 0,6715; 0; 0,2510]$ is quantized to 5 bits of precision. Determine the quantized coefficients. Determine the error of the quantized filter in decibels compared to the original filter at frequency π .

7. Kuvan 3 suodatinrealisaatiot toteutetaan 16 bitin sananpituudella käyttäen 32 bittistä akkurekisteriä. Piirrä realisaatiokaaviot ja merkitse sinne kohdat, joissa arvoja pyöristetään. Laske pyöristyskohinateho molemmille suodattimille. (3p)

The filter realizations in Figure 3 are implemented for a 16 bit system with 32 bit accumulator. Draw the realization diagrams and mark where rounding takes place. Calculate the noise power at the output for both filters.



Kuva/Figure 3

8. Suunnittele digitaalinen IIR-suodatin bilineaarista z -muunnosta käyttäen. Digitaalisen suodattimen päästökaista on 5-10 kHz ja näytteistystaajuus on 30kHz. Suunnittelun lähtökohdaksi saat alla esitetyn analogisen Butterworth-suodattimen siirtofunktion. Esitä digitaalisen suodattimesi siirtofunktio. (3p)

Design a digital IIR filter using bilinear z transform. The passband of the filter is 5-10 kHz and sampling frequency is 30kHz. For the basis of your design you get an analog Butterworth filter shown below. Present the transfer function of your filter.

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

9. Kuvan 4 digitaalisen signaalin näytteistystaajuus on 100 kHz. Näytteistystaajuutta nostetaan tekijällä 10. Näytteistystaajuuden muunnoksessa käytettävät suodattimet suunnitellaan ikkunamenetelmällä käyttäen Hamming-ikkunaa.

The sampling frequency of the signal in Figure 4 is 100 kHz. The signal is upsampled by a factor 10. The filters used are designed using Hamming window.

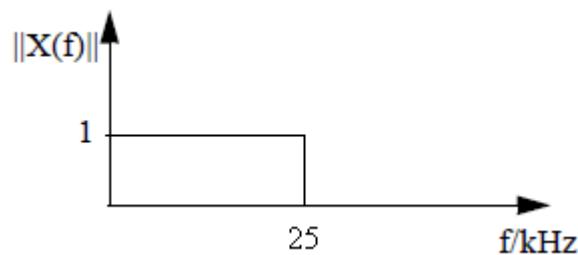
Vertaile seuraavia kolmea toteutustapaa. Kuinka pitkiä suodattimia kussakin ratkaisussa tarvitaan? Mitkä ovat kunkin suodattimen päästökaista, estokaista, transitiokaista ja näytteistystaajuus. (3p)

Compare the three solutions described below. How long filters do you need in each of them? What are the specifications (passband, stopband, transition band and sampling frequency) of the filters used in each solution?

- Muunnos yhdessä vaiheessa. Upsampling in one phase.

- Muunnos kahdessa vaiheessa, ensin tekijällä 2 ja sitten 5. Upsampling in two phases. First with a factor 2 and then with a factor 5.

- Muunnos kahdessa vaiheessa, ensin tekijällä 5 ja sitten 2. Upsampling in two phases. First with a factor 5 and then with a factor 2.



Kuva/Figure 4

LPF -> LPF: $s = s/\omega'_p$
 LPF -> HPF: $s = \omega'_p/s$
 LPF -> BPF: $s = (s^2 + \omega_0^2)/(Ws)$
 LPF -> BSF: $s = Ws/(s^2 + \omega_0^2)$

$$\omega_0^2 = \omega'_1 \omega'_2$$

$$W = \omega'_2 - \omega'_1$$

$$\omega'_p = \tan(\omega_p/(2F_s))$$

Tyyppi	Δf	A_p	A_s	Ikkunafunktio
Suorakaide	$0.9/N$	0.7416	21	1
Hanning	$3.1/N$	0.0546	44	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
Kaiser	$2.93/N$ ($\beta=4.54$)	0.0274	50	$\frac{I_0(\beta \{1 - [2n/(N-1)]^2\}^{1/2})}{I_0(\beta)}$
	$4.32/N$ ($\beta=6.76$)	0.00275	70	
	$5.71/N$ ($\beta=8.96$)	0.000275	90	

<i>Filter type</i>	<i>Ideal impulse response, $h_D(n)$</i>	
	$h_D(n), n \neq 0$	$h_D(0)$
Lowpass	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Highpass	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
Bandpass	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
Bandstop	$2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N}$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} = H_1(z)H_2(z)$$

Impulse response symmetry	Number of coefficients N	Frequency response $H(\omega)$	Type of linear phase
Positive symmetry, $h(n) = h(N-1-n)$	Odd	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n)$	1
	Even	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$	2
Negative symmetry, $h(n) = -h(N-1-n)$	Odd	$e^{-j[\omega(N-1)/2 - \pi/2]} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} a(n) \sin(\omega n)$	3
	Even	$e^{-j[\omega(N-1)/2 - \pi/2]} \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$	4

$$a(0) = h[(N-1)/2]; \quad a(n) = 2h[(N-1)/2 - n]$$

$$b(n) = 2h(N/2 - n)$$

$$\|H(f)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^{(N-1)/2} 2|H(k)| \cos[2\pi k(n - \alpha/N)] + H(0) \right]$$

Viikkotentti 8. Tämä viikkotentti on vain niille, jotka haluavat uusia kevään 8. viikkotentin.

Week exam 8. This week exam is only for those who want to retake the 8th week exam.

1. Suunnittele digitaalinen IIR-suodatin bilineaarista z-muunnosta käyttäen. Digitaalisen suodattimen päästökaista on 5-10 kHz ja näytteistystaajuus on 30kHz. Suunnittelun lähtökohdaksi saat alla esitetyn analogisen Butterworth-suodattimen siirtofunktion. Esitä digitaalisen suodattimesi siirtofunktio. (3p)

Design a digital IIR filter using bilinear z transform. The passband of the filter is 5-10 kHz and sampling frequency is 30kHz. For the basis of your design you get an analog Butterworth filter shown below. Present the transfer function of your filter.

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

2. Muunna seuraava realisaatiodiagrammi kahdesta kanonisesta toisen asteen lohkokosta (ns. Direct Form II) koostuvaksi kaskadiksi.

