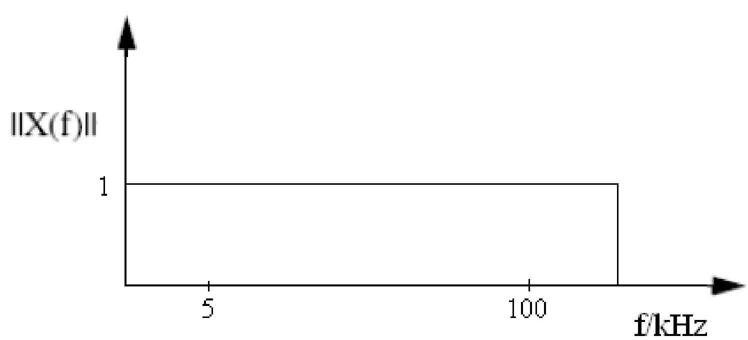
Sähkö- ja tietotekniikan osasto
Digitaaliset suodattimet
Tentti 30.10.2009.

Huom: tentissä sallitaan ns. laillinen luntta (A4-kokoinen, käsin kirjoitettu, molemmat puolet voi käyttää, valokopiot eivät ole sallittuja). Jos tehtävässä tarvitaan impulssivaste, niin sen kolme ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä riittää.
Notice: a legal cheat sheet is allowed in this exam (single A4-sheet, filled by hand, both sides of the paper can be used; photocopies are not allowed). In case calculating impulse response is required, the first three non-zero coefficients suffice.

1. Eräässä laitteessa analoginen signaali (kuva 1), jonka kiinnostava kaista on [0,5] kHz muunnetaan digitaaliseksi (näytteistystaajuus 25kHz) käyttäen 5 bitin sananpituutta. Laskostumisen estoon käytetään Butterworth-tyyppistä alipäästösuodatinta.

   An analog signal in Figure 1 (interesting band [0,5] kHz) is converted to a digital signal with 25kHz sampling rate using 5 bit word length. A Butterworth type low-pass filter is used as an anti-aliasing filter.

   a) Piirrä järjestelmän lohkokaavio. Hahmottele signaalin spektri jokaisen lohkon jälkeen 75kHz:iin asti. (1p)
   Present the block diagram of the system. Sketch the spectrum of the signal after each block till 75kHz.
   b) Mitkä ovat tarvittavan Butterworth-suodattimen asteluku ja cut-off-taajuus? Kiinnostava kaista saa vaimentua korkeintaan 4dB. (2p)
   Calculate the order and cut-off frequency of the Butterworth filter. The interesting band can be attenuated 4dB at most.

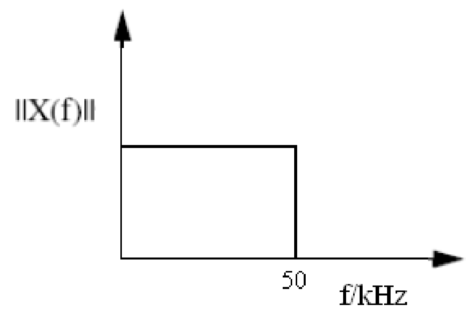


Kuva/Figure 1

2. Kuvan 2 digitaalinen signaali (näytteistystaajuus 200kHz) muunnetaan analogiseksi käyttäen 0-kertaluokan pitoa. Kuvastumisen estoon käytetään Butterworth-tyyppistä alipäästösuodatinta (asteluku n = 2 ja cut-off-taajuus 55kHz).

   The digital signal in Figure 2 (sampling rate 200kHz) is converted to an analog signal using zero-order hold. A Butterworth type low-pass filter (order n = 2 and cut-off frequency 55kHz) is used for anti-imaging.

a) Piirrä järjestelmän lohkokaavio ja hahmottele signaalin spektri jokaisen lohkon jälkeen. (2p)
Present the block diagram of the system and sketch the spectrum of the signal after each block.
b) Kuinka paljon ulos tuleva analoginen signaali on vaimentunut digitaaliseen verrattuna taajuudella 50kHz? (2p)
How much is the analogous signal attenuated compared to the digital at 50kHz frequency?



Kuva/Figure 2

3. Signaali x(n) = [1 2 4 2 0 0 1 2 1 0 2 2 1 1] syötetään digitaaliseen suodattimeen h(n) = [-0.5 1 -0.5 0 0]. Laske tulossekvenssi käyttäen overlap-save-menetelmää. (3p)
Signal x(n)= [1 2 4 2 0 0 1 2 1 0 2 2 1 1] is the input signal to filter h(n) = [-0.5 1 -0.5 0 0]. Determine the output sequence using overlap-save method.

4. Tarkastellaan suodatinta
Let us consider the filter

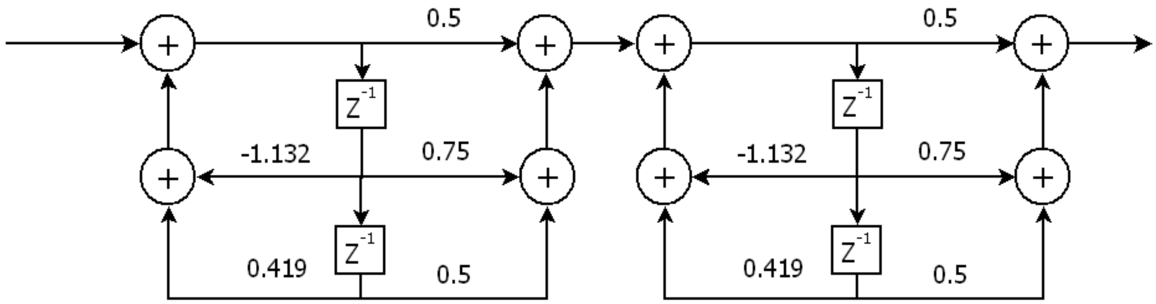
$$H(z) = \frac{(z-\sqrt{2}j)(z-0.5j)(z+\sqrt{2}j)(z+0.5j)}{(z^2+2)(z^2-0.25)}$$

a) Laske suodattimen impulssivaste. (1p)
Determine the impulse response of the filter.
b) Laske ja piirrä suodattimen amplitudi- ja vaihevaste välillä [0,2π] $\frac{\pi}{2}$ välein. (3p)
Determine and plot the amplitude and phase responses of the filter at $\frac{\pi}{2}$ intervals over the frequency range of [0,2π].

5. Digitaalinen suodatin h(n) = [-0.31 0.251 0.49 0.49 0.251 -0.31] kvantisoidaan 5 bitin tarkkuuteen. Laske kvantisoinnista aiheutuvan virheen taajuusvaste taajuuksilla 0, $\frac{\pi}{2}$,π,$\frac{3\pi}{2}$ ja 2π. (3p)

The coefficients of the digital filter h(n) = [-0.31 0.251 0.49 0.49 0.251 -0.31] are quantized to a 5 bit accuracy. Determine the frequency response of the quantization error at the frequencies 0, $\frac{\pi}{2}$,π,$\frac{3\pi}{2}$ ja 2π.

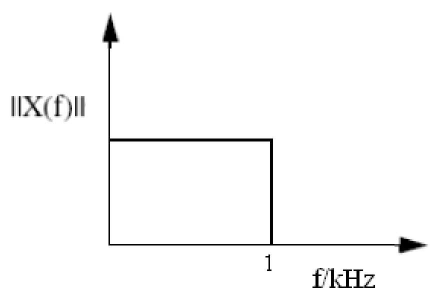
6. Laske kuvan 3 suodattimelle tarvitut L_2-normin mukaiset skaalaustekijät. Esitä realisaatiokaavio, johon olet merkinnyt käytettävät skaalauskertoimet asianmukaisiin paikkoihin. (3p)
   Determine needed L_2 norm based scaling factors for the filter in Figure 3. Present a realization diagram where you have marked the scaling factors used at proper locations.



Kuva/Figure 3

7. Kuvan 4 digitaalisen signaalin näytteistystaajuutta täytyy nostaa kolmessa vaiheessa 4kHz:sta 144kHz:aan. Signaalin kiinnostava kaista on [0,200] Hz.
   Piirrä järjestelmän lohkokaavio ja hahmottele signaalin spektri jokaisen lohkon jälkeen. Perustele valitsemasi lohkojärjestys.
   Mitkä ovat tarvittavien ikkunamenetelmällä suunniteltavien suodattimien rajataajuudet ja pituudet kun kiinnostavan kaistan virhe saa olla korkeintaan 0,2dB? (4p)

   The digital signal (interesting band [0,200] Hz) in Figure 4 is up-sampled from 4kHz to 144kHz in three stages.
   Present the block diagram of the system and sketch the spectrum of the signal after each block. Justify the order of the blocks.
   What are the specifications and lengths of the needed filters? The sampling rate conversion is allowed to add 0,2dB ripple to the pass band. The filters are to be designed using a suitable window function.



Kuva/Figure 4

Impulse response symmetry	*Number of coefficients N*	*Frequency response $H(\omega)$*	*Type of linear phase*
Positive symmetry, $h(n) = h(N-1-n)$	Odd	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega n)$	1
	Even	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$	2
Negative symmetry, $h(n) = -h(N-1-n)$	Odd	$e^{-j[\omega(N-1)/2-\pi/2]} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} a(n)\sin(\omega n)$	3
	Even	$e^{-j[\omega(N-1)/2-\pi/2]} \sum_{n=1}^{N/2} b(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$	4

$a(0) = h[(N-1)/2]$; $a(n) = 2h[(N-1)/2-n]$
$b(n) = 2h(N/2-n)$

Tyyppi	Δf	A_p	A_s	Ikkunafunktio
Suorakaide	$0.9/N$	0.7416	21	1
Hanning	$3.1/N$	0.0546	44	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
Kaiser	$2.93/N$ (β=4.54) $4.32/N$ (β=6.76) $5.71/N$ (β=8.96)	0.0274 0.00275 0.000275	50 70 90	$\frac{I_0(\beta\{1-[2n/(N-1)]^2\}^{1/2})}{I_0(\beta)}$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{j2\pi nk/N}$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j2\pi k/N}z^{-1}} = H_1(z)H_2(z)$$

Filter type	*Ideal impulse response, $h_D(n)$*	
	$h_D(n), n \neq 0$	$h_D(0)$
Lowpass	$2f_c\frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Highpass	$-2f_c\frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
Bandpass	$2f_2\frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1\frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
Bandstop	$2f_1\frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2\frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1\text{-}2(f_2 - f_1)$

$$\text{L}_1\text{-normi} \quad s_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|$$

$$\text{L}_2\text{-normi} \quad s_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} f^2(k)}$$