

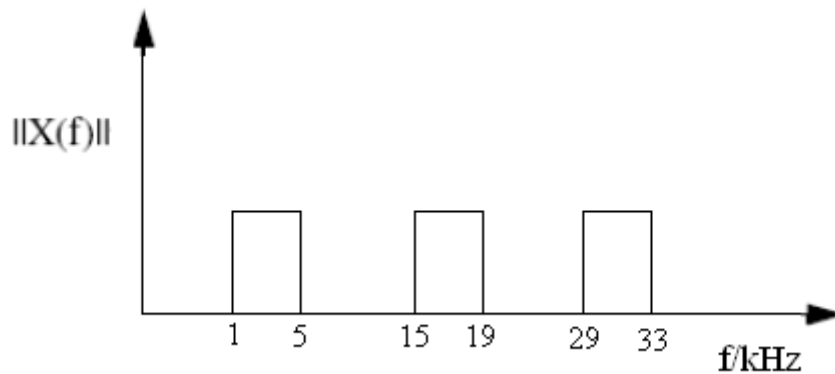
**Sähkö- ja tietotekniikan osasto**

**Digitaaliset suodattimet: tentti 11.9.2009.**

**Huom: tentissä sallitaan ns. laillinen luntta (A4-kokoinen, käsin kirjoitettu, molemmat puolet voi käyttää).**

1. Eräessä järjestelmässä kulkee useita analogisia signaaleita samaa kaapelia pitkin. Alla oleva kuva esittää kaapelissa kulkevan signaalin spektriä. Signaalista erotetaan alin kaista [1;5]kHz käyttäen Butterworth-tyyppistä alipäästösuodatinta ja sen jälkeen signaali muunnetaan digitaaliseksi (näytteistystaajuus 20kHz).

The spectrum of a time continuous signal is in Figure 1. The band [1;5]kHz must be separated from the signal using a Butterworth type anti-aliasing filter. The signal is then A/D converted at 20kHz sampling rate.



**Kuva 1**

a. Piirrä järjestelmän lohkokaaavio ja signaalin spektrit 60kHz asti A/D-muunnoksen ja suodatuksen jälkeen. (1p)

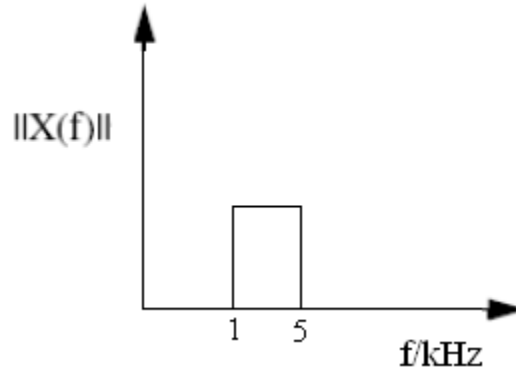
Draw the block diagram of the system and sketch the spectrum of the signal after A/D conversion and filtering. (1p)

b. Erotettava kaista [1;5]kHz saa vaimentua suodatuksessa korkeintaan 0.1dB ja alinta laskostuvaa taajuutta on vaimennettava vähintään 20dB. Mitkä ovat tarvittavan Butterworth-tyyppisen alipäästösuodattimen asteluku ja cut-off-taajuus? Mikä on suodattimen lyhin järkevä sananpituus? (3p)

The [1;5]kHz band can be attenuated 0.1dB and the lowest aliasing frequency must be attenuated at least 20dB. What are the cut-off frequency and the order of the Butterworth filter? What is the lowest reasonable resolution for the A/D conversion? (3p)

2. Alla olevan kuvan digitaalinen signaali (näyteistystaajuus 20kHz) muunnetaan analogiseksi käyttäen 0-kertaluokan pitoa. Kuvastumisenestoon käytetään Butterworth-tyyppistä alipäästösuodatinta.

The digital signal in Figure 2 (sampling rate 20kHz) is transformed to an analogous signal using zero-order hold. A Butterworth type filter is used as an anti imaging filter.



Kuva 2

a. Piirrä järjestelmän lohkokaavio ja hahmottele signaalin spektri jokaisen lohkon jälkeen 60kHz asti. (2p)

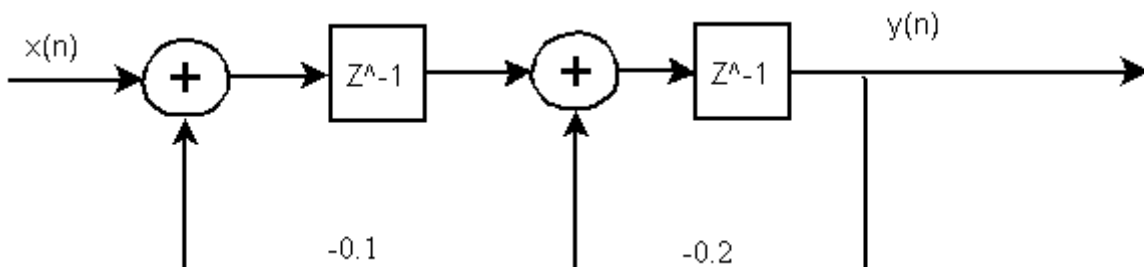
Draw the block diagram of the system and sketch the spectrum of the signal after each block till 60kHz. (2p)

b. Kuinka paljon analoginen signaali vaimenee digitaaliseen verrattuna 5kHz kohdalla jos Butterworth-suodattimen asteluku on 2 ja cut-off-taajuus on 7kHz? (2p)

How much is the analogous signal attenuated compared to the digital signal at 5 kHz if the cut-off frequency and order of the Butterworth filter are 7kHz and 2 respectively? (2p)

3. Mikä on kuvan 3 suodattimen siirtofunktio? (2p) Laske suodattimen impulssivasteen kolme ensimmäistä termiä. (2p)

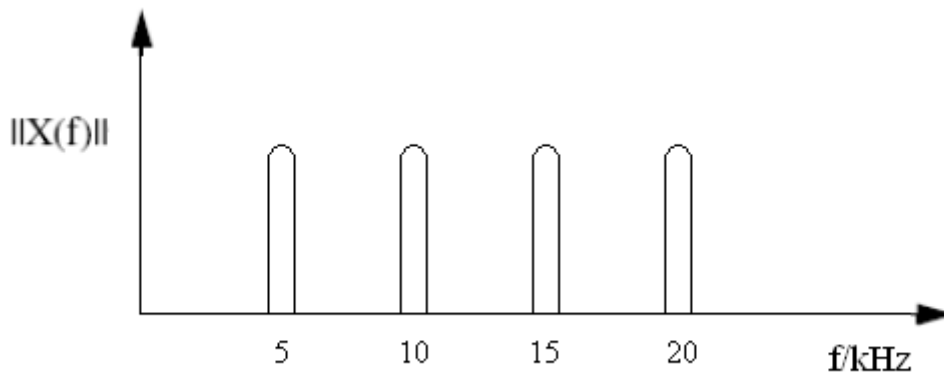
What is the transfer function of the filter in Figure 3? (2p) Determine the first three coefficients of the impulse response. (2p)



Kuva 3

4. Kuvassa 4 on digitaalinen signaali, jonka näytteistystaajuus on 100kHz. Signaalissa on neljä kapeakaistaista komponenttia, joista vain ensimmäinen on kiinnostava. Suunnittele taajuusnäytteistysmenetelmällä reaalikertoiminen rekursiivinen FIR-suodatin, joka säilyttää 5kHz komponentin ja poistaa loput. Mikä on suodattimen differenssiyhtälö? (4p)

The sampling rate of the signal in Figure 4 is 100kHz. There are 4 narrow band components from which only the first one (5kHz) is interesting. Design a real valued recursive FIR filter using the frequency sampling method that will attenuate the other bands while leaving the interesting band. What is the difference equation of the filter? (4p)



Kuva 4

5. Digitaalinen alipäästösuodatin  $h(n) = [-0.0039 \ -0.0323 \ 0.5362 \ 0.5362 \ -0.0323 \ -0.0039]$  kvantisoidaan 5 bitin tarkkuuteen.

A digital filter  $h(n) = [-0.0039 \ -0.0323 \ 0.5362 \ 0.5362 \ -0.0323 \ -0.0039]$  is quantized to 5 bit precision.

a. Laske suodattimen kvantisoidut kertoimet. (1p)

Present the quantized coefficients. (1p)

b. Kuinka paljon virhettä desibeleinä kvantisointi aiheuttaa taajuuksilla 0 ja  $\frac{\pi}{4}$ ? (2p)

How much does the magnitude response differ in the quantized filter compared to the original (in decibels) at frequencies 0 and  $\frac{\pi}{4}$ ? (2p)

6. Kuvan 5 signaalin (kiinnostava kaista [0;2]kHz) näytteistystaajuus nostetaan 10kHz:sta 15kHz:iin.

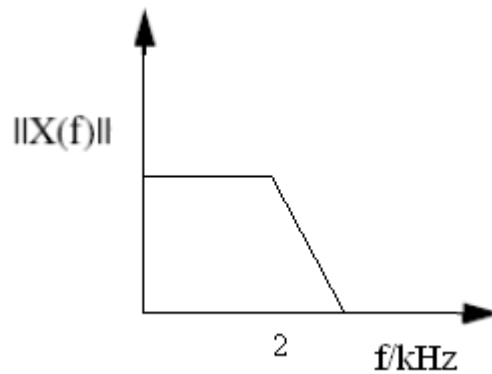
The sampling frequency of the signal (interesting band [0;2]kHz) in Figure 5 is raised from 10kHz to 15kHz.

a. Piirrä järjestelmän lohkoakaavio. Hahmottele signaalin spektri jokaisen lohkon jälkeen. (2p)

Draw the block diagram of the system. Sketch the spectrum of the signal after each block. (2p)

b. Mitkä ovat tarvittavien ikkunamenetelmällä suunniteltavien mahdollisimman lyhyiden suodattimien spesifikaatiot (rajataajuudet ja pituudet) kun kiinnostavan kaistan rippeli saa olla korkeintaan 0.1dB ja kuvastuvien taajuuksien täytyy vaimentua vähintään 45dB? (3p)

The filters must be designed so that the least possible amount of processing power is used. The filters can add at most 0.1 dB to the ripple in the interesting band, while the aliasing error may not exceed 45dB. What are the specifications and lengths of the filters if they are designed using a suitable window function?



Kuva 5

$$\|H(f)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

LPF -> LPF:  $s = s/\omega'_p$   
 LPF -> HPF:  $s = \omega'_p/s$   
 LPF -> BPF:  $s = (s^2 + \omega_0^2)/(Ws)$   
 LPF -> BSF:  $s = Ws/(s^2 + \omega_0^2)$   
 $\omega'_p = \tan(\omega_p/(2F_s))$   
 $s = (z-1)/(z+1)$

order n	Butterworth approximations [H(s)]
1	$1/(s + 1)$
2	$1/(s^2 + \sqrt{2} s + 1)$
3	$1/((s^2 + s + 1)(s + 1))$

Tyyppi	$\Delta f$	$A_p$	$A_s$	Ikkunafunktio
Suorakaide	$0.9/N$	0.7416	21	1
Hanning	$3.1/N$	0.0546	44	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
Kaiser	$2.93/N$ ( $\beta=4.54$ ) $4.32/N$ ( $\beta=6.76$ ) $5.71/N$ ( $\beta=8.96$ )	0.0274 0.00275 0.000275	50 70 90	$\frac{I_0(\beta \{1 - [2n/(N-1)]^2\}^{1/2})}{I_0(\beta)}$

Filter type	Ideal impulse response, $h_D(n)$	
	$h_D(n), n \neq 0$	$h_D(0)$
Lowpass	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Highpass	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
Bandpass	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
Bandstop	$2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

<i>Impulse response symmetry</i>	<i>Number of coefficients N</i>	<i>Frequency response H(ω)</i>	<i>Type of linear phase</i>
Positive symmetry, $h(n) = h(N-1-n)$	Odd	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n)$	1
	Even	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right]$	2
Negative symmetry, $h(n) = -h(N-1-n)$	Odd	$e^{-j[\omega(N-1)/2 - \pi/2]} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} a(n) \sin(\omega n)$	3
	Even	$e^{-j[\omega(N-1)/2 - \pi/2]} \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \sin \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right]$	4

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N}$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} = H_1(z)H_2(z)$$