

Sähkö- ja tietotekniikan osasto Digitaaliset suodattimet: tentti 15.5.2009

Huom: tentissä sallitaan ns. laillinen luntta (koko A4, käsin kirjoitettu, molemmat puolet voi käyttää).

Notice: a legal cheat sheet is allowed (size A4, hand written, both sides can be used)

Viikkotenttien 6-10 uusijoiden tarvitsee laskea vain tehtävät 5, 6, 7 ja 8. Näiden pisteet kerrottuna 5/2:lla ja pyöristettynä lähimpään kokonaislukuun korvaavat viikkotenttien 6-10 pisteet (läpäisyraja 6p vastaa 15p viikkotenttijärjestelmässä).

Those participants renewing the week exams 6-10 only need to solve for the problems 5,6, 7 and 8. The points will be multiplied by 5/2 and rounded to the nearest integer, and replace the points from week exams 6-10.

1. Erään jatkuva-aikaisen analogisen signaalin spektri on kuvassa 1. Signaalin kiinnostava kaista on [5,10] kHz. Signaali näytteistetään ja kvantisoidaan 6-bittiseksi. Käytettävä Butterworth-tyyppinen laskostumisenestosuodatin (asteluku $n = 2$) saa aiheuttaa kiinnostavalle kaistalle korkeintaan 2,5dB virheen.

The spectrum of a time continuous analog signal (interesting band [5,10]kHz) is in Figure 1. The resolution of the A/D conversion is 6 bits. The order of the Butterworth type anti-aliasing filter is $n=2$. The antialiasing filter may attenuate the pass band by at most 2,5dB.

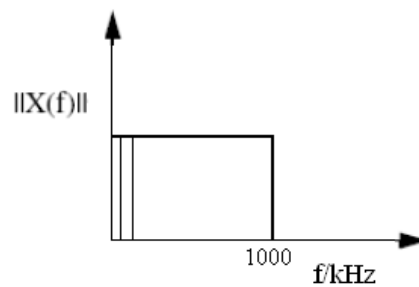


Figure 1. Spectrum of an analog signal.

- 1a. Piirrä järjestelmän lohkokkaavio ja signaalin spektri sen jokaisessa vaiheessa. (2p)

Present a block diagram of the system and sketch the spectra of the signal after each block.

- 1b. Mikä on suodattimen alin mielekäs cut-off-taajuus? Mikä on alin järkevä näytteistystaajuus? (2p)

What is the lowest reasonable cut-off frequency of the filter? What is the lowest reasonable sampling frequency?

2. Digitaalinen signaali, jonka amplitudispektri on kuvassa 2, muunnetaan aikajatkuvaksi 0-kertaluokan pitoa käyttäen. Signaalin näytteistystaajuus on 90kHz. Kuvastumisenestoon käytetään Butterworth-tyyppistä alipäästösuodatinta, jonka cut-off-taajuus on 15kHz ja asteluku $n=2$.

The spectrum of a digital signal is presented in Figure 2. The signal is converted into a time continuous analog signal using zero order hold. The sampling frequency of the signal is 90kHz. A Butterworth-type filter (cut-off frequency 15kHz and order 2) is used as the anti imaging filter.

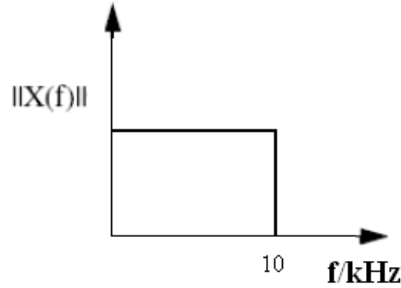


Figure 2. The magnitude spectrum of a digital signal.

2a. Piirrä järjestelmän lohkokaavio ja signaalin spektri jokaisessa vaiheessa. (2p)

Present a block diagram of the system and sketch the spectrum of the signal after each block.

2b. Kuinka paljon signaalin korkein taajuus ja alin kuvastuva taajuus vaimenevat järjestelmän lähdössä? (2p)

How much are the highest frequency in the signal and the lowest image frequency attenuated at the output of the system?

3. Erään FIR-suodattimen amplitudivasteeksi välillä $[0, \pi]$ on saatu $[1 \ 1 \ 0]$ ja vaihevasteeksi $[0 \ \frac{-3\pi}{4} \ \frac{-3\pi}{2}]$. Määritä suodattimen impulssivaste. (2p)

The amplitude and phase response of a filter in range $[0, \pi]$ is $[1 \ 1 \ 0]$ and $[0 \ \frac{-3\pi}{4} \ \frac{-3\pi}{2}]$ respectively. What is the impulse response of the filter.

4 Laske kuvan 3 realisaatiokaavion osoittaman suodattimen taajuusvaste $\frac{\pi}{2}$ välein. (2p)

Determine the frequency response of the filter in Figure 3 at $\frac{\pi}{2}$ intervals.

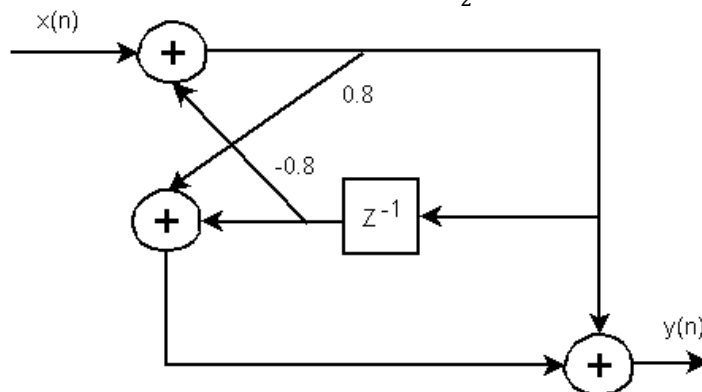


Figure 3. A filter realization.

5. Erään jatkuva-aikaisen kapeakaistaisen biosignaalin amplitudispektri laskostumisnestosuodattimen jälkeen on kuvan 4 mukainen.

The spectrum of an analog narrow band bio signal after anti-aliasing filtering is shown in Figure 4.

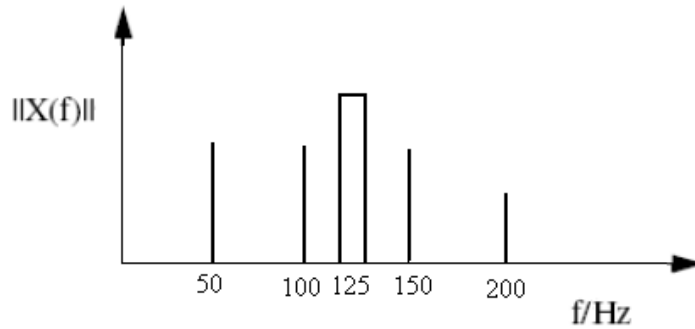


Figure 4. The magnitude spectrum of an analog anti-aliasing filtered signal

Suunnittele taajuusnäytteistysmenetelmällä reaalikertoiminen rekursiivinen FIR-suodatin, joka jättää jäljelle signaalin kiinnostavan kaistan. Näytteistystaajuus on vapaasti valittavissa välillä [10Hz, 1MHz]. (3p)

Use the frequency sampling method to design a digital real-valued recursive FIR filter that preserves only the interesting band. The sampling frequency can be selected freely from the range of [10Hz, 1MHz].

6. Muunna analoginen kaistanpäästösuodatin $H(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+16}$ digitaaliseksi käyttäen bilineaarista z-muunnosta. (3p)

Design a digital bandpass filter using $H(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+16}$ as basis for the design.

Use bilinear z-transform.

7. Erään suodatintoteutuksen reaalisatiokaavio on kuvassa 5. Signaalien ja kertoimien esitystarkkuus on 16 bittiä. Suodattimen akkurekisteri voi olla 16 tai 32 bittiä pitkä. Mikä on näiden vaihtoehtojen ero pyörityksistä suodattimen lähtöön aiheutuvan kohinan osalta desibeleinä? (3p)

A realization diagram of a filter is in Figure 5. The resolution of the signals and filter coefficients is 16 bits. The accumulator of the filter can be either 16 or 32 bits. How much does the noise power of these alternative implementations differ in decibels at the output of the filter?

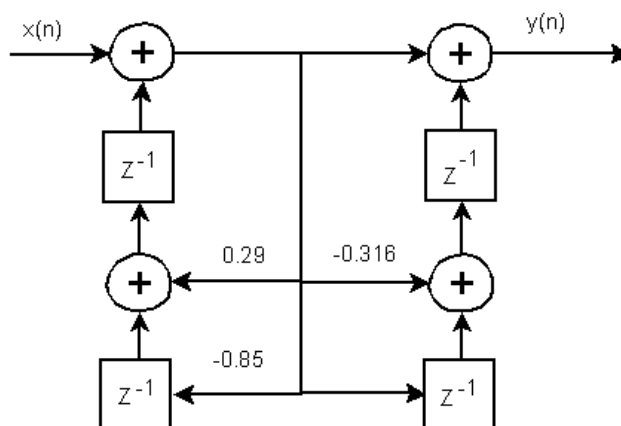


Figure 5. A filter realization.

8. Suunnittele järjestelmä, joka pudottaa signaalin, jonka kiinnostava kaista on [0,10]kHz, näytteistystaajuuden 60kHz:sta 6kHz:iin kahdessa vaiheessa käyttäen mahdollisimman lyhyitä suodattimia. Näytteistystaajuuden muutoksessa käytettävät suodattimet saavat aiheuttaa päästökaistalle maksimissaan 2% virheen ja kuvastustaajuuksia on vaimennettava vähintään 50dB. Piirrä järjestelmän lohko-kaavio ja signaalin spektri joka vaiheessa. Mitkä ovat tarvittavien ikkunamenetelmällä suunniteltavien suodattimien spesifikaatiot (päästö- ja estokaistojen taajuudet ja pituus)? (3p)

Design a system that converts the sampling frequency of the signal (interesting band [0,10]kHz) from 60kHz to 6kHz in two stages using shortest possible filters. The down-sampling can result in at most 2% error in the interesting band and the image frequencies must be attenuated at least 50 dB. Present the block diagram of the system and the spectrum of the signal after each block. What are the specification of the needed filters (pass band, stop band and length)?

$$\|H(f)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

LPF -> LPF: $s = s/\omega'_p$
 LPF -> HPF: $s = \omega'_p/s$
 LPF -> BPF: $s = (s^2 + \omega_0^2)/(Ws)$
 LPF -> BSF: $s = Ws/(s^2 + \omega_0^2)$
 $\omega'_p = \tan(\omega_p/(2F_s))$
 $s = (z-1)/(z+1)$

order n	Butterworth approximations [H(s)]
1	$1/(s + 1)$
2	$1/(s^2 + \sqrt{2} s + 1)$
3	$1/((s^2 + s + 1)(s + 1))$

Impulse response symmetry	Number of coefficients N	Frequency response $H(\omega)$	Type of linear phase
Positive symmetry, $h(n) = h(N-1-n)$	Odd	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n)$	1
	Even	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$	2
Negative symmetry, $h(n) = -h(N-1-n)$	Odd	$e^{-j[\omega(N-1)/2 - \pi/2]} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} a(n) \sin(\omega n)$	3
	Even	$e^{-j[\omega(N-1)/2 - \pi/2]} \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$	4

$$a(0) = h[(N-1)/2]; \quad a(n) = 2h[(N-1)/2 - n]; \quad b(n) = 2h(N/2 - n)$$

Filter type	Ideal impulse response, $h_D(n)$	
	$h_D(n), n \neq 0$	$h_D(0)$
Lowpass	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Highpass	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
Bandpass	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
Bandstop	$2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

Type	Δf	A_p (dB)	A_s (dB)	Window function
Rectangle	$0.9/N$	0.7416	21	1
Hanning	$3.1/N$	0.0546	44	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N}$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} = H_1(z) H_2(z)$$