DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 9, ratkaisut

1. a) Tehdään Laplace-muunnos puolittain, jolloin
vasen puoli:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(y'' + 4y' + 13y\right) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s)\\ &= Y(s)\left(s^2 + 4s + 13\right) - s - 2.\end{aligned}$$

Oikea puoli: $\mathcal{L}(0) = 0$. Siten

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2 + 4s + 13} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2},$$

joten käänteismuunnoksella saadaan

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t).$$

b) Yhtälön vasemman puolen Laplace-muunnos on sama kuin edellä, oikean puolen Laplace-muunnos on $\mathcal{L}(6\delta(t-2)) = 6\,\mathrm{e}^{-2s}$. Siten saadaan

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{6}{(s+2)^2 + 3^2}\,\mathrm{e}^{-2s} =$$

ja edelleen käänteismuunnoksella

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t) + 2\,\mathrm{e}^{-2(t-2)}\sin(3(t-2))H(t-2).$$

2. a) Laplace-muuntamalla molemmat puolet saadaan $Y(s)(s^2 + 6s + 8) = \mathrm{e}^{-s}$. Siten

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}\,\mathrm{e}^{-s}.$$

Osamurtojen avulla esitettynä $Y(s)$ on muotoa

$$Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right)\mathrm{e}^{-s}.$$

Käänteismuunnoksella saadaan ratkaisu

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2(t-1)} - \mathrm{e}^{-4(t-1)}\right)H(t-1).$$

b) Laplace-muuntamalla molemmat puolet saadaan $Y(s)(s^2 + 6s + 8) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s}\,\mathrm{e}^{-3s}$. Siten

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+2)(s+4)} - \frac{4}{s(s+2)(s+4)}\,\mathrm{e}^{-3s}.$$

Osamurtojen avulla saadaan

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+4} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+4}\right)\mathrm{e}^{-3s}.$$

Käänteismuunnoksella saadaan ratkaisu

$$y(t) = \frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-4t} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-4(t-3)} - \mathrm{e}^{-2(t-3)}\right) H(t-3).$$

3. Muunnetaan yhtälö $y'' + 7y' + 10y = 12\,\mathrm{e}^{-t} - 3\delta(t-2)$.
Yhtälö $s-$alueessa on

$$\mathcal{L}(y'' + 7y' + 10y) = (s^2 + 7s + 10)Y(s) = \mathcal{L}(12\,\mathrm{e}^{-t} - 3\delta(t-2)) = \frac{12}{s+1} - 3\,\mathrm{e}^{-2s}.$$

Ratkaisun muunnos on

$$Y(s) = \frac{12}{(s+1)(s^2+7s+10)} - \frac{3}{s^2+7s+10}\,\mathrm{e}^{-2s}.$$

Osamurtoihin kehitettynä on

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{4}{s+2} + \frac{1}{s+5} - \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+5}\right)\mathrm{e}^{-2s}.$$

Varsinainen ratkaisu saadaan käänteismuunnoksella

$$y(t) = 3\,\mathrm{e}^{-t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-5t} + \left(\mathrm{e}^{-5(t-2)} - \mathrm{e}^{-2(t-2)}\right) H(t-2)$$

eli paloittain määriteltynä $y(t) = \begin{cases} 3\,\mathrm{e}^{-t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-5t}, & \text{kun } 0 < t < 2, \\ 3\,\mathrm{e}^{-t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-5t} + \mathrm{e}^{-5(t-2)} - \mathrm{e}^{-2(t-2)}, & \text{kun } \ t > 2. \end{cases}$

4. Paloittain määritelty häiriö voidaan esittää Heavisiden askelfunktion avulla, joten differentiaaliyhtälö on

$$y'' + 3y' + 2y = 4H(t) - 4H(t-1).$$

Laplace-muunnoksella saadaan

$$Y(s)\left(s^2 + 3s + 2\right) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s}\,\mathrm{e}^{-s},$$

josta edelleen

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)} - \frac{4}{s(s+1)(s+2)}\,\mathrm{e}^{-s}.$$

Osamurtokehitelmän avulla $Y(s)$ voidaan esittää muodossa

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \left(\frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right)\mathrm{e}^{-s}.$$

Käänteismuunnoksella saadaan ratkaisu

$$y(t) = 2 - 4\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t} - \left(2 - 4\,\mathrm{e}^{-(t-1)} + 2\,\mathrm{e}^{-2(t-1)}\right) H(t-1).$$