

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 9

Tähdellä merkityt tehtävät ovat ns. lisäpistetehtävät.

1. a) Ratkaise

$$y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

Laplace-muunnoksen avulla.

b) Ratkaise

$$y'' + 4y' + 13y = 6\delta(t - 2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

Laplace-muunnoksen avulla.

2*. a) Ratkaise

$$y'' + 6y' + 8y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Laplace-muunnoksen avulla.

b) Ratkaise

$$y'' + 6y' + 8y = 4 - 4H(t - 3), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Laplace-muunnoksen avulla.

3. Ratkaise Laplace-muunnoksella alkuarvotehtävä

$$y'' + 7y' + 10y = 12e^{-t} - 3\delta(t - 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Esitä myös paloittain määritellyt ratkaisut.

4. Ratkaise Laplace-muunnoksella alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 4, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

kun $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 0$.

Laplace-muunnoksen kaavoja:

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{ct} f(t)) &= F(s - c) \\ \mathcal{L}(t^n f(t)) &= (-1)^n F^{(n)}(s) \\ \mathcal{L}(H(t - c)f(t - c)) &= e^{-cs} F(s) \\ \mathcal{L}(\delta(t - c)) &= e^{-cs} \end{aligned}$$

Vastaukset:

1.

a) $y(t) = e^{-2t} \cos(3t),$

b) $y(t) = e^{-2t} \cos(3t) + 2e^{-2(t-2)} \sin(3(t-2))H(t-2),$

2.

a) $y(t) = \frac{1}{2} \left(e^{-2(t-1)} - e^{-4(t-1)} \right) H(t-1),$

b) $y(t) = \frac{1}{2} - e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-4t} - \left(\frac{1}{2} - e^{-2(t-3)} + \frac{1}{2} e^{-4(t-3)} \right) H(t-3),$

3.

$y(t) = 3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-5t} + \left(e^{-5(t-2)} - e^{-2(t-2)} \right) H(t-2)$ eli paloittain määriteltynä

$$y(t) = \begin{cases} 3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-5t}, & \text{kun } 0 < t < 2, \\ 3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-5t} + e^{-5(t-2)} - e^{-2(t-2)}, & \text{kun } t > 2, \end{cases}$$

4. $y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} - \left(2 - 4e^{-(t-1)} + 2e^{-2(t-1)} \right) H(t-1).$