DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 8, ratkaisut

Tehtävän 1 ratkaisu: Kirchhoffin lakien mukaan $U_L + U_R + U_C = e$, jossa $U_L = Li'$ on jännitehäviö kelassa, $U_R = Ri$ on jännitehäviö vastuksessa ja $U_C = \frac{1}{C}q$ on jännitehäviö kondensaattorissa. Piirin sähkövirta on hetkellisen varauksen muutosnopeus eli $i = q'$. Nyt voimme kirjoittaa virtapiiriä kuvaavan differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävän piirin hetkellisen varauksen $q = q(t)$ suhteen

$$\begin{cases} Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = e = 220\sin(300t), \\ q(0) = 0, q'(0) = 0. \end{cases}$$

Homogeeniyhtälö on $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$. Karakteristisen yhtälön $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$ juuret ovat

$$\lambda_{12} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4\frac{0.25}{4\cdot 10^{-4}}}}{2\cdot 0.25} = -80 \pm 60i,$$

joten homogeeniyhtälön ratkaisu on $q_H(t) = \mathrm{e}^{-80t}\big(C_1\sin(60t) + C_2\cos(60t)\big)$.
Täydellinen yhtälö: Sähkömotorinen voima on sinimuotoinen, joten täydellisen yhtälön ratkaisuyrite on $q_0 = A\sin(300t) + B\cos(300t)$.
Sen derivaatat ovat $q_0' = 300A\cos(300t) - 300B\sin(300t)$ ja $q_0'' = -300^2A\sin(300t) - 300^2B\cos(300t)$. Sijoitetaan ne yhtälöön ja vaaditaan yhtälön toteutuminen

$$\begin{aligned} Lq'' + Rq' + \tfrac{1}{C}q \quad &= -0.25\cdot 300^2A\sin(300t) - 0.25\cdot 300^2B\cos(300t) \\ &\quad +40\cdot 300A\cos(300t) - 40\cdot 300B\sin(300t) \\ &\quad +\tfrac{1}{4\cdot 10^{-4}}\big(A\sin(300t) + B\cos(300t)\big) \\ &= (-20000A - 12000B)\sin(300t) + (12000A - 20000B)\cos(300t) \\ &= 220\sin(300t), \quad \text{kaikilla } t. \end{aligned}$$

Sinin ja kosinin kertoimet ratkaistaan yhtälöparista

$$\begin{cases} -20000A - 12000B = 220, \\ 12000A - 20000B = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{11}{1360}, \\ B = -\frac{33}{6800}. \end{cases}$$

Täydellisen yhtälön eräs ratkaisu on $q_0(t) = -\frac{11}{1260}\sin(300t) - \frac{33}{6800}\cos(300t)$.

Yleinen ratkaisu on

$$q(t) = q_H(t) + q_0(t) = \mathrm{e}^{-80t}\big(C_1\sin(60t) + C_2\cos(60t)\big) - \frac{11}{1360}\sin(300t) - \frac{33}{6800}\cos(300t).$$

Virta saadaan derivoimalla ($i = q'$)

$$\begin{aligned} i = &-80\,\mathrm{e}^{-80t}\big(C_1\sin(60t) + C_2\cos(60t)\big) + \mathrm{e}^{-80t}\big(60C_1\cos(60t) - 60C_2\sin(60t)\big) \\ &- \frac{3300}{1360}\cos(300t) + \frac{9900}{6800}\sin(300t) \\ = &\ \mathrm{e}^{-80t}\big((-80C_1 - 60C_2)\sin(60t) + (60C_1 - 80C_2)\cos(60t)\big) - \frac{165}{68}\cos(300t) + \frac{99}{68}\sin(300t). \end{aligned}$$

Vakiot määrätään alkuehdoista

$$\begin{cases} q(0) = C_2 - \frac{33}{6800} = 0 \\ i(0) = -80C_2 + 60C_1 - \frac{165}{68} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \frac{319}{6800}, \\ C_2 = \frac{33}{6800}. \end{cases}$$

Piirin hetkellinen varaus on

$$q(t) = \mathrm{e}^{-80t}\left(\frac{319}{6800}\sin(60t) + \frac{33}{6800}\cos(60t)\right) - \frac{11}{1360}\sin(300t) - \frac{33}{6800}\cos(300t)$$

ja piirin hetkellinen virta on

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{e}^{-80t}\big((-80\cdot\tfrac{319}{6800} - 60\cdot\tfrac{33}{6800})\sin(60t) + (60\cdot\tfrac{319}{6800} - 80\cdot\tfrac{33}{6800})\cos(60t)\big) \\ &\qquad -\tfrac{165}{68}\cos(300t) + \tfrac{99}{68}\sin(300t) \\ &= \mathrm{e}^{-80t}\big(-\tfrac{275}{68}\sin(60t) + \tfrac{165}{68}\cos(60t)\big) - \tfrac{165}{68}\cos(300t) + \tfrac{99}{68}\sin(300t). \end{aligned}$$

2. Muunnettu differentiaaliyhtälö on

$$\mathcal{L}(y' + y) = \mathcal{L}\left(\sin(2t)\right).$$

Vasemman puolen muunnos on (lineaarisuus, derivaatan muunnos, alkuehto)

$$\mathcal{L}(y' + y) = sY(s) - y(0) + Y(s) = (s+1)Y(s)$$

ja oikean puolen muunnos (lineaarisuus, taulukko)

$$\mathcal{L}(\sin(2t)) = \frac{2}{s^2+4}.$$

Siten

$$\begin{aligned} (s+1)Y(s) &= \frac{2}{s^2+4} \\ Y(s) &= \frac{2}{(s+1)(s^2+4)} \quad \|^* \\ Y(s) &= \frac{2}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{5}\frac{2}{s^2+4}. \end{aligned}$$

Kohdassa * on käytetty osamurtokehitelmää:

$$\frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{s+1} = \frac{2}{(s^2+4)(s+1)} \Rightarrow$$

$$\frac{(A+C)s^2 + (A+B)s + B + 4C}{(s^2+4)(s+1)} = \frac{2}{(s^2+4)(s+1)},$$

josta saadaan yhtälöryhmä kertoimille:

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ A + C &= 0 \\ B + 4C &= 2. \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu: $A = -\frac{2}{5}$ ja $B = C = \frac{2}{5}$.

Ratkaisu saadaan käänteismuunnoksella käyttäen taulukkoa:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{5}\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}\sin(2t).$$

3. a) Taulukoista saadaan $\mathcal{L}\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{s^n}$. Siten $\mathcal{L}\left(t^{n-1}\right) = \frac{(n-1)!}{s^n}$, joten

$$F(s) = \mathcal{L}(3 + 4t + 6t^2 + 3t^3) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s^3} + \frac{18}{s^4}.$$

b) Taulukoista saadaan suoraan $F(s) = \mathcal{L}(\sin(3t) + 2\,\mathrm{e}^{-3t}) = \frac{3}{s^2+9} + \frac{2}{s+3}$.

4. a) Nimittäjä s^2+9 voidaan esittää muodossa s^2+3^2. Lisäksi huomataan, että nimittäjällä ei ole reaalisia nollakohtia (mikäli olisi, tarvittaisiin osamurtokehitelmää). Siten

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+9}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}\right) = \cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t).$$

b) Nimittäjällä on reaaliset juuret 3 ja -1, joten $s^2 - 2s - 3 = (s+1)(s-3)$. Siten

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{s^2-2s-3}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{(s+1)(s-3)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{2}{s+1} + \frac{2}{s-3}\right) = -2\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{3t}.$$

c) Suoraan taulukosta saadaan

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{12}{s^5}\right) = 12\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^5}\right) = 12\cdot\frac{t^4}{4!} = \frac{1}{2}t^4.$$

5. Laplace-muuntamalla yhtälö puolittain saadaan yhtälön vasemmasta puolesta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y'' + 6y' + 8y) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 6(sY(s) - y(0)) + 8Y(s)\\ &= Y(s)(s^2 + 6s + 8) - 2s - 12\end{aligned}$$

ja oikeasta puolesta $\mathcal{L}(0) = 0$.
Siten

$$\begin{aligned}Y(s)\left(s^2 + 6s + 8\right) &= 2s + 12\\ Y(s) &= \frac{2s+12}{s^2+6s+8} = \frac{2s+12}{(s+2)(s+4)}\\ Y(s) &= \frac{4}{s+2} - \frac{2}{s+4}\\ y(t) &= 4\,\mathrm{e}^{-2t} - 2\,\mathrm{e}^{-4t}.\end{aligned}$$