

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 8

Tähdellä merkityt tehtävät ovat ns. lisäpistetehtävät.

1. Sarjaan kytketyn virtapiirin vastus $R = 40 \Omega$ (Ohmi), kelan induktanssi $L = 1/4$ H (Henry) ja kondensaattorin varauskyky $4 \cdot 10^{-4}$ F (Faraday).

Ajanhetkellä $t = 0$ virtapiirissä ei ole varausta eikä virtaa: $q(0) = 0$ C ja $i(0) = 0$ A. Se kytketään jännitelähteeseen, jonka sähkömotorinen voima $e(t) = 220 \sin(300t)$ V. Laske virtafunktio $i(t)$.

- 2*. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen

$$y' + y = \sin(2t), \quad y(0) = 0.$$

3. Määrä $F(s)$ (Laplace-muunnos) taulukoiden avulla

a) $f = 3 + 4t + 6t^2 + 3t^3$,

b) $f = \sin(3t) + 2e^{-3t}$.

- 4*. Määrä $f(t)$ (Laplace-käänteismuunnos) taulukoiden avulla

a) $F(s) = \frac{s-1}{s^2+9}$,

b) $F(s) = \frac{8}{s^2-2s-3}$,

c) $F(s) = \frac{12}{s^5}$.

5. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Laplace-muunnoksen kaavoja:

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}(e^{ct} f(t)) = F(s-c)$
$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$
$\mathcal{L}(H(t-c)f(t-c)) = e^{-cs} F(s)$
$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$

Vastaukset:

1. $i(t) = e^{-80t} \left(-\frac{275}{68} \sin(60t) + \frac{165}{68} \cos(60t) \right) - \frac{165}{68} \cos(300t) + \frac{99}{68} \sin(300t)$,
2. $y(t) = \frac{2}{5} e^{-t} - \frac{2}{5} \cos(2t) + \frac{1}{5} \sin(2t)$,
3. a) $F(s) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s^3} + \frac{18}{s^4}$, b) $F(s) = \frac{3}{s^2+3^2} + \frac{2}{s+3}$,
4. a) $f(t) = \cos(3t) - \frac{1}{3} \sin(3t)$, b) $f(t) = 2e^{3t} - 2e^{-t}$, c) $f(t) = \frac{1}{2} t^4$,
5. $y(t) = 4e^{-2t} - 2e^{-4t}$.