DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 7, ratkaisut

1. a) Ratkaistaan ensin homogeeniyhtälö: $y'' + 4y' - 5y = 0$. Yrite on $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, joten derivaatat ovat $y' = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}$.
Sijoitetaan yrite yhtälöön ja vaaditaan yhtälön toteutuminen

$$\begin{aligned} y'' + 4y' - 5y &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} + 4\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} - 5\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + 4\lambda - 5) = 0, \qquad \text{kaikilla } x. \end{aligned}$$

Siten $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$. Eli nollakohdat ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -5$.
Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-5x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tarvitsemme täydelliselle yhtälölle erään ratkaisun. Häiriö on $25x^2$. Koska 0 ei ole karakteristisen yhtälön juuri, otetaan perusyrite $y_0(x) = Ax^2 + Bx + C$. Lasketaan derivaatat

$$y_0' = 2Ax + B,\ y_0'' = 2A,$$

ja sijoitetaan yrite yhtälöön sekä vaaditaan yhtälön toteutuminen

$$\begin{aligned} y_0'' + 4y_0' - 5y_0 &= 2A + 4(2Ax + B) - 5(Ax^2 + Bx + C) \\ &= -5Ax^2 + (8A - 5B)x + 2A + 4B - 5C = 25x^2, \qquad \text{kaikilla } x. \end{aligned}$$

On oltava $-5A = 25$, $8A - 5B = 0$ ja $2A + 4B - 5C = 0$ eli $A = -5$, $B = -8$ ja $C = -\frac{42}{5}$.
Siten häiriötä x^2 vastaava ratkaisu on

$$y_0 = -5x^2 - 8x - \frac{42}{5}.$$

Yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-5x} + -5x^2 - 8x - \frac{42}{5}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Homogeeniyhtälö on sama kuin kohdassa a). Lasketaan täydellisen yhtälön eräs ratkaisu. Häiriö on nyt $4\,\mathrm{e}^{-x}$. Koska $\lambda = -1$ ei ole karakteristisen yhtälön juuri, otetaan perusyrite $y_0 = A\,\mathrm{e}^{-x}$. Sijoittamalla yrite ja sen derivaatat differentiaaliyhtälöön saadaan $A = -\frac{1}{2}$. Siten yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-5x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Häiriö on nyt $12\,\mathrm{e}^{x}$. Koska $\lambda = 1$ on karakteristisen yhtälön juuri, niin otetaan yritteeksi modifioitu yrite $y_0 = Ax\,\mathrm{e}^{x}$. Yritteeksi ei kelpaa $A\,\mathrm{e}^{x}$, sillä tämä esiintyy jo homogeeniyhtälön ratkaisussa. Sijoittamalla yrite ja sen derivaatat (muista tulon derivaatta!)

$$y_0'(x) = (A + Ax)\,\mathrm{e}^{x},\ y_0''(x) = (2A + Ax)\,\mathrm{e}^{x}$$

yhtälöön $\Rightarrow$

$$6A\,\mathrm{e}^{x} = 12\,\mathrm{e}^{x},$$

mistä saadaan $A = 2$. Eli $y_0(x) = 2x\,\mathrm{e}^x$, joten yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-5x} + 2x\,\mathrm{e}^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Yritteen $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ avulla saadaan $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ eli $(2\lambda + 1)^2 = 0$, joten karakteristisella yhtälöllä on kaksoisjuuri $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$. Siten homogeeniyhtälön ratkaisu on $y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
Täydellisen yhtälön eräs ratkaisu saadaan määräämättömien kertoimien menetelmällä. Sijoittamalla yrite $y_0(x) = A\,\mathrm{e}^{-x}$ ja sen derivaatat yhtälöön saadaan $A = 1$. Täten ratkaisu on

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Homogeeniyhtälön ratkaisu on $y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-4x}$. Yrite on $y_0(x) = Ax\,\mathrm{e}^{-4x} + Bx + C$, jossa $A = -\frac{5}{8}$, $B = -\frac{1}{16}$ ja $C = 0$. Siten yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-4x} - \frac{5}{8}x\,\mathrm{e}^{-4x} - \frac{1}{16}x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Vastaavan homogeeniyhtälön karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0.$$

Homogeeniyhtälön ratkaisu on

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Häiriö on $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$, joten otetaan yrite $y_0(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + C$ (vaikka häiriössä ei ole sini-termi, on yritteessä otettava sini-termi mukaan, sillä sini- ja kosinitermit vuorottelevat derivoitaessa). Sijoittamalla yrite ja sen derivaatat saadaan

$$y_0'' + 2y_0' + y_0 = (-3A - 4B)\cos(2x) + (-4A - 3B)\sin(2x) + C = -\cos(2x) + 1,$$

josta saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} -4A - 3B &= 0, \\ -3A - 4B &= -1 \\ C &= 1. \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $A = \frac{9}{25}$, $B = -\frac{4}{25}$ ja $C = 1$. Funktio

$$y_0(x) = \frac{9}{25}\cos(2x) - \frac{4}{25}\sin(2x) + 1$$

on täydellisen yhtälön eräs yksityisratkaisu. Yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{9}{25}\cos(2x) - \frac{4}{25}\sin(2x) + 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Homogeeniyhtälön ratkaisu on

$$y_H(t) = C_1\cos(5t) + C_2\sin(5t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Häiriö on $2\sin(5t)$ ja koska $\sin(5t)$ esiintyy jo homogeeniyhtälön ratkaisussa, niin otetaan modifioitu yrite $y_0(t) = At\cos(5t) + Bt\sin(5t)$. Sijoittamalla yrite ja sen derivaatat differentiaaliyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} y_0'' + 25y_0 &= -10A\sin(5t) + 10B\cos(5t) - 25At\cos(5t) - 25Bt\sin(5t) \\ &\quad +25(At\cos(5t) + Bt\sin(5t)) \\ &= -10A\sin(5t) + 10B\cos(5t) = 2\sin(5t), \end{aligned}$$

joten $A = -\frac{1}{5}$ ja $B = 0$. Siten yleinen ratkaisu on

$$y(t) = C_1\cos(5t) + C_2\sin(5t) - \frac{1}{5}t\cos(5t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Alkuehdoista saadaan $C_1 = 0$ ja $C_2 = \frac{1}{25}$, joten alkuehdot toteuttava ratkaisu on

$$y(t) = \frac{1}{25}\sin(5t) - \frac{1}{5}t\cos(5t).$$

6. Määrättävä kaikki funktiot, jotka toteuttavat yhtälön

$$y''(x) + y(-x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Tapa 1: Merkitään funktiolla $z(x) = y(-x)$. Silloin on voimassa

$$x = y''(x) + z(x) \tag{3}$$
$$-x = y''(-x) + z(-x) = z''(x) + y(x). \tag{4}$$

Määritellään apufunktiot u ja v asettamalla

$$u(x) = y(x) + z(x) \tag{5}$$
$$v(x) = y(x) - z(x). \tag{6}$$

Laskemalla yhtälöt (1) ja (2) yhteen saadaan

$$u''(x) + u(x) = 0 \tag{7}$$

ja ottamalla niiden erotus saamme yhtälön

$$v''(x) - v(x) = 2x. \tag{8}$$

Yhtälön (7) **yleinen ratkaisu**: Karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 + 1 = 0$ ja juret $\lambda = \pm i = \pm\sqrt{-1}$. Yleinen ratkaisu on siten

$$u(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x).$$

Yhtälön (8) **yleinen ratkaisu**: Vastaava homogeeniyhtälö on $v'' - v = 0$ minkä yleinen ratkaisu on

$$y_H(x) = C_3\,\mathrm{e}^{-x} + C_4\,\mathrm{e}^{x}.$$

Yksityisratkaisu haetaan yritteellä $y_0(x) = Ax + B,\ y_0'(x) = A,\ y_0''(x) = 0$. Sijoitus yhtälöön antaa

$$y_0''(x) - y_0(x) = -Ax - B = 2x \;\Rightarrow\; B = 0,\ A = -2.$$

Täten funktio

$$v(x) = C_3\,\mathrm{e}^{-x} + C_4\,\mathrm{e}^{x} - 2x.$$

Alkuperäisen yhtälön ratkaisut sisältyvät ratkaisujoukkoon

$$y(x) = \frac{1}{2}\big(u(x) + v(x)\big) = -x + A_1\cos(x) + A_2\sin(x) + A_3\,\mathrm{e}^{-x} + A_4\,\mathrm{e}^{x},$$

missä $A_i = \frac{C_i}{2},\ i = 1, 2, 3, 4$. Mutta tässä joukossa on myös niitä funktioita, jotka eivät toteuta alkuperäistä yhtälöä. Esimerkiksi funktio $g(x) = -x + \sin(x)$ ei toteuta yhtälöä $g''(x) + g(-x) = x$. Lopullinen ratkaisu esitetään alla.

Tapa 2: Derivoidaan relaatiota

$$y''(x) = x - y(-x)$$

kaksi kertaa:

$$y^{(4)}(x) = -y''(-x) = x + y(x). \tag{9}$$

Funktio $y(x)$ toteuttaa 4:nnen kertaluvun yhtälön

$$y^{(4)} - y = x.$$

Homogeeniyhtälölle tehdään yrite $y(_h(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan $\lambda^4 - 1 = 0$, jonka juuret ovat $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -i, \lambda_4 = i$. Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siten

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x).$$

Täydellisen yhtälön yksityisratkaisu haetaan muodossa $y_0(x) = A + Bx,\ y^{(4)}(x) = 0$, eli saadaan $A = 0$ ja $B = -1$. Täydellisen yhtälön (9) yleinen ratkaisu on

$$y(x) = -x + C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x),\ C_k \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Ratkaisu (10) on sama kuin tavasssa 1.

Seuraavaksi on valittava ne kaavan (10) ratkaisut, jotka toteuttavat alkuperäisen yhtälön (2). Derivoidaan (10) kahdesti:

$$y''(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} - C_3\cos(x) - C_4\sin(x).$$

Summataan se funktion

$$\begin{aligned} y(-x) &= x + C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} + C_3\cos(-x) + C_4\sin(-x) \\ &= x + C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} + C_3\cos(x) - C_4\sin(x) \end{aligned}$$

kanssa (muista, että sini on pariton ja kosini on parillinen). Yhtälön (2) nojalla

$$y''(x) + y(-x) = x + (C_1 + C_2)\big(\,\mathrm{e}^{x} +\,\mathrm{e}^{-x}\big) - 2C_4\sin(x) = x,$$

joten $C_1 + C_2 = 0$ ja $C_4 = 0$ sekä $C_3 \in \mathbb{R}$. Näin ollen yhtälön (2) kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(x) = -x + 2C_2\sinh(x) + C_3\cos(x), \quad C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \tag{11}$$