DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 6, ratkaisut

1. Homogeenisen yhtälön

$$\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$$

yleinen ratkaisu on

$$\theta(t) = A\cos(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t + \phi_0),\ A \in \mathbb{R},\ \phi_0 \in [0, 2\pi).$$

Värähtelytaajuus: $\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \approx 0.3525\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.
Heiluri ohittaa yhden jakson aikana kaksi kertaa lepotilansa, joten minuutissa se ohittaa lepotilan

$$120 * \omega \approx 42.30 \text{ eli vähintään 42 kertaa}$$

2. Yhtälön

$$y'' + \omega^2 y = 0,\ \omega > 0$$

karakteristisen yhtälön $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ juuret ovat $\lambda_1 = -i\omega$ ja $\lambda_2 = i\omega$.
Yleinen ratkaisu: $y(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$.
Reunaehdot:

$$\begin{aligned} y(0) &= A\sin(0) + B\cos(0) = B = 0 \\ y(1) &= A\sin(\omega) + B\cos(\omega) = A\sin(\omega) = 0 \end{aligned}$$

Nollasta eroavia ratkaisuja, kun $A \neq 0$ ja

$$\sin(\omega) = 0 \ \Leftrightarrow\ \omega = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Nollasta eroavat ratkaisut

$$y_n(x) = A\sin(n\pi x),\ n = 1, 2, 3, \ldots,\ A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3. Yhtälön

$$y'' + \omega^2 y = 0,\ \omega > 0$$

karakteristisen yhtälön $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ juuret ovat $\lambda_1 = -i\omega$ ja $\lambda_2 = i\omega$.
Yleinen ratkaisu: $y(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$ ja sen derivaatta

$$y'(x) = A\omega\cos(\omega x) - B\omega\sin(\omega x).$$

Reunaehdot:

$$\begin{aligned} y'(0) &= A\omega\cos(0) - B\omega\sin(0) = A\omega = 0 \\ y'(1) &= A\omega\cos(\omega) - B\omega\sin(\omega) = -B\omega\sin(\omega) = 0 \end{aligned}$$

Nollasta eroavia ratkaisuja, kun $B \neq 0$ ja

$$\sin(\omega) = 0 \ \Leftrightarrow\ \omega = n\pi,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Nollasta eroavat ratkaisut

$$y_n(x) = B\cos(n\pi x),\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots,\ B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$