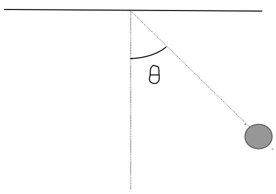

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 6

Tähdellä merkitty tehtävä on ns. lisäpistetehtävä. Riittää laskea vain tehtävä 1. Jokeritehtävä 4 on tarkoitettu edistyneemmille pieneksi piristykseksi. Sillä voi korvata, minkä tahansa aikaisemman tai myöhemmän tähtitehtävän.

1*. Oletetaan, että ohuen tangon (tai langan) päähän asetetaan massa m ja tanko kiinnitetään kattoon nivelellä. Tangon pituus olkoon L. Olettaen, että tangon massa on likipitäen nolla, jättämällä ilmanvastus ja kitkatekijät huomiotta, heilurin liikettä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0, \ g = 9.81 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Jos edelleen heilahduskulma $\theta(t)$ on pieni, voidaan käyttää approksimaatiota $\sin(\theta) \approx \theta$. Tällöin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

a) Jos heilurin varren pituus on 2 m, niin kuinka monta kertaa minuutissa heiluri kulkee tasapainotilansa ohi.

b) Määrää se differentiaaliyhtälön ratkaisu, mikä vastaa alkuehtoja

$$\theta(0) = 1,$$
$$\theta'(0) = 0.$$

2. Määrää kaikki parametrin $\omega \in \mathbb{R}$ arvot, joilla differentiaaliyhtälöllä

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

on nollasta eroavia ratkaisuja ($y(x) \neq 0$), jotka toteuttavat reunaehdot:

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Määrää myös ratkaisufunktiot.

3. Määrää kaikki parametrin $\omega \in \mathbb{R}$ arvot, joilla differentiaaliyhtälöllä

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

on nollasta eroavia ratkaisuja, jotka toteuttavat reunaehdot:

$$y'(0) = y'(1) = 0.$$

Määrää myös ratkaisufunktiot.

4*. **Jokeritehtävä**: Olkoon a mielivaltainen reaaliluku. Määrää kaikki ne funktiot, jotka toteuttavat differentiaaliyhtälön

$$y'(x) = y(a - x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisut:

1. a) n. 42 kertaa, b) $\theta(t) = \cos(\omega t)$, $\omega = ?$.
2. $\omega = n\pi, \ n = 1, 2, 3, \ldots$ ja $y_n(x) = A \sin(n\pi x), \ n = 1, 2, 3, \ldots$.
3. $\omega = n\pi, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ja $y_n(x) = A \cos(n\pi x), \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
4. $y(x) = C \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} - x) = C \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} + x), \ C \in \mathbb{R}$.