DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 5, ratkaisut

1. a) Yhtälö on vakiokertoiminen toisen kertaluvun homogeeniyhtälö. Ratkaistaan yhtälö yritteen $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ avulla. Yritteen derivaatat ovat $y' = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ ja $y'' = \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}$. Sijoitetaan yrite ja derivaatat yhtälöön ja vaaditaan yhtälön toteutuminen

$$\begin{aligned} y'' - 8y' + 15y &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} - 8\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + 15\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = 0 \text{ kaikilla } x. \end{aligned}$$

On oltava $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$. Kyseessä on toisen asteen yhtälö, joten ratkaisut saadaan ratkaisukaavalla

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

eli $\lambda = 5$ tai $\lambda = 3$. Funktiot $y_1(x) = \mathrm{e}^{3x}$ ja $y_2(x) = \mathrm{e}^{5x}$ ovat toisen kertaluvun homogeeniyhtälön ratkaisuja. Yleinen ratkaisu on niiden lineaariyhdistely

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{5x},$$

jossa vakiot C_1, C_2 ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

b) Sijoittamalla yrite $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ ja sen derivaatat saadaan karakteristinen yhtälö $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$. Juuret ovat toisen kertaluvun juuria, tämä nähdään tekijäesityksestä

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2\,.$$

Siis $\lambda = -4$ on karakteristisen yhtälön kaksoisjuuri. Funktiot $y_1(x) = \mathrm{e}^{-4\,x}$ ja $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{-4\,x}$ ovat toisen kertaluvun homogeeniyhtälön ratkaisuja. Yleinen ratkaisu on niiden lineaariyhdistely

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-4\,x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-4\,x},$$

jossa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Sijoittamalla yrite $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ ja sen derivaatat homogeeniyhtälöön saadaan $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan karakteristisen yhtälön juuriksi

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 10}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(6i)^2}}{2} = -1 \pm 3i.$$

Siten funktiot $y_1(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$ ja $y_2(x) = C_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin(3x)$ ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja. Yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos(3x) + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin(3x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisua varten lasketaan yleisen ratkaisun derivaatta y':

$$y' = -C_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos(3x) - 3C_1\,\mathrm{e}^{-x}\sin(3x) - C_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin(3x) + 3C_2\,\mathrm{e}^{-x}\cos(3x).$$

Alkuarvotehtävän ehdoista saadaan

$$\begin{aligned} y(0) = 3: &\quad C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = 3 \quad \text{eli} \quad C_1 = 3, \\ y'(0) = 0: &\quad -C_1 + 3C_2 = 0 \quad \text{eli} \quad C_2 = \tfrac{1}{3}C_1 = 1. \end{aligned}$$

Siis alkuehdot toteuttava ratkaisu on

$$y(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x}\cos(3x) + \mathrm{e}^{-x}\sin(3x).$$

3. Toisen kertaluvun vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö ratkeaa yritteellä $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1.$$

Siten yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ehdosta $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ saadaan $C_1 = 0$. Ehdosta $y(0) = 2$ saadaan $C_2 = 2$, joten ehdot toteuttava ratkaisu on

$$y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

4. Sijoittamalla yleinen ratkaisu $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{-4x}$ ja sen derivaatat differentiaaliyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} & C_1\,\mathrm{e}^{-x} + 16C_2\,\mathrm{e}^{-4x} - AC_1\,\mathrm{e}^{-x} - 4AC_2\,\mathrm{e}^{-4x} + BC_1\,\mathrm{e}^{-x} + BC_2\,\mathrm{e}^{-4x} \\ = \ & C_1\,\mathrm{e}^{-x}(1 - A + B) + C_2\,\mathrm{e}^{-4x}(16 - 4A + B) = 0 \end{aligned}$$

Koska differentiaaliyhtälön toteutuminen vaaditaan kaikilla muuttujan x ja kertoimien C_1, C_2 arvoilla, on oltava $1 - A + B = 0$ ja $16 - 4A + B = 0$. Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $A = 5$ ja $B = 4$.
Toinen tapa. Funktioista e^{-x} ja e^{-4x} nähdään, että karakteristisen yhtälön juuret ovat $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = -4$. Siten karakteristinen yhtälö on $p(\lambda) = (\lambda - (-1))(\lambda - (-4)) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$. Siten sitä vastaava homogeeniyhtälö on $y'' + 5y' + 4y = 0$ eli $A = 5$ ja $B = 4$.

5. Karakteristinen yhtälön juuret ovat

$$\lambda = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 8k}}{2} = -4 \pm \sqrt{16 - 2k}.$$

Kun $16 - 2k < 0$ saadaan kompleksijuuria, eli kun $k > 8$. Tällöin juuret ovat $\lambda_{1,2} = -4 \pm i\sqrt{2k - 16}$. Siten yhtälön ratkaisu on

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{-4t}\cos\left(\sqrt{2k - 16}t\right) + C_2\,\mathrm{e}^{-4t}\sin\left(\sqrt{2k - 16}t\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Alkuehdosta $y(0) = 2$ saadaan $C_1 = 2$ ja ehdosta $y'(0) = -8$ saadaan $C_2 = 0$. Siten alkuehdot toteuttava ratkaisu on

$$y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-4t}\cos\left(\sqrt{2k - 16}t\right).$$