

# DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

## Kevät 2022, Harjoitus 5

Tähdellä merkitty tehtävä on ns. lisäpistetehtävä.

1. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt yrittäällä  $y = e^{\lambda x}$ .

a)  $y'' - 8y' + 15y = 0$ ,

b)  $y'' + 8y' + 16y = 0$ .

2\*. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

3. Ratkaise

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

ehdoilla

$$y(0) = 2 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$

4\*. Tarkastellaan toisen kertaluvun vakiokertoimista homogeeniyhtälöä

$$y'' + Ay' + By = 0, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tiedetään, että  $y_1 = C_1 e^{-x}$  ja  $y_2 = C_2 e^{-4x}$  toteuttavat differentiaaliyhtälön. Mitä on vakioiden  $A$  ja  $B$  oltava?

5. Millä vakion  $k$  arvolla yhtälön

$$\frac{1}{2}y'' + 4y' + ky = 0$$

ratkaisut ovat vaimenevia värähtelyjä? Vaimenevia värähtelyjä saadaan, kun karakteristisella yhtälöllä on kompleksijuuria, joiden reaaliosa on negatiivinen. Laske edelleen se vaimeneva värähtely, joka toteuttaa alkuehdot  $y(0) = 2$  ja  $y'(0) = -8$ .

### Vastaukset:

1. a)  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}$ , b)  $y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$ ,

2.  $y(x) = 3 e^{-x} \cos(3x) + e^{-x} \sin(3x)$ ,

3.  $y(x) = 2 e^{-x}$ ,

4.  $A = 5$  ja  $B = 4$ ,

5.  $k > 8$ ,  $y = 2 e^{-4x} \cos(\sqrt{2k - 16}x)$ .