DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 4, ratkaisut

1. Yhtälö $y' + y = \sin(\omega x)$ on lineaarinen. Ratkaistaan integroivan tekijän menetelmällä.

- Integroiva tekijä on
$$p(x) = \mathrm{e}^{\int x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x}.$$
- Kerrotaan puolittain integroivalla tekijällä:
$$\mathrm{e}^{x} y'(x) + \mathrm{e}^{x} y(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(\omega x).$$
- Vasen puoli voidaan kirjoittaa tulon derivaattana:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{x} y(x)) = \mathrm{e}^{x}\sin(\omega x).$$
- Integroidaan puolittain:
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x} y(x) &= \int \mathrm{e}^{x}\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x,\\ &= \frac{1}{1+\omega^2}\sin(\omega x)\,\mathrm{e}^{x} - \frac{\omega}{1+\omega^2}\cos(\omega x)\,\mathrm{e}^{x} + C.\end{aligned}$$
- Yleinen ratkaisu:
$$y(x) = \frac{1}{1+\omega^2}\sin(\omega x) - \frac{\omega}{1+\omega^2}\cos(\omega x) + C\,\mathrm{e}^{-x}.$$
- Alkuehto:
$$y(0) = -\frac{\omega}{1+\omega^2} + C = 0.$$
Alkuarvotehtävän ratkaisu on
$$y(x) = \frac{1}{1+\omega^2}\sin(\omega x) - \frac{\omega}{1+\omega^2}\cos(\omega x) + \frac{\omega}{1+\omega^2}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Differentiaaliyhtälö
$$y' + x^2 y = x^2$$
on lineaarinen.
Integroiva tekijä: $p(x) = \mathrm{e}^{\int x^2\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}$.
Kertomalla integroivalla tekijällä puolittain saadaan yhtälö muotoon
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p(x)y(x)) = x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3},$$
mistä integroimalla saadaan
$$y(x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} = \int x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} + C.$$
Yleinen ratkaisu on
$$y(x) = 1 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}.$$
Alkuehto: $y(0) = 2 = 1 + C \;\Rightarrow\; C = 1$.
Alkuarvotehtävän ratkaisu
$$y(x) = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

3. a)

$$\begin{aligned}
u' - 2x^{-1}u &= 2x \quad \| p(x) = \mathrm{e}^{\int -2x^{-1}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-2}u\right) &= 2x^{-1} \quad \| \int \\
x^{-2}u &= 2\ln(x) + C \quad \| \cdot x^2 \\
u(x) &= 2x^2\ln(x) + Cx^2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x^2+y^2}{xy} = x^{-1}y + xy^{-1} \\
y' - x^{-1}y &= xy^{-1} \quad \| \text{ sij. } z = y^2 \Rightarrow y = z^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}z' \\
\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}z' - x^{-1}z^{\frac{1}{2}} &= xz^{-\frac{1}{2}} \quad \| \cdot 2z^{\frac{1}{2}} \\
z' - 2x^{-1}z &= 2x \quad \| \text{ kohdasta a) saadaan} \\
y^2 = z &= 2x^2\ln(x) + Cx^2
\end{aligned}$$

Tämä voidaan myös ratkaista sijoituksen $z = \frac{y}{x}$ avulla (tasa-asteinen differentiaaliyhtälö).

4. a)

$$\begin{aligned}
y' + 5y &= 4\,\mathrm{e}^{-x} \quad \| \cdot p(x) = \mathrm{e}^{\int 5\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{5x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{5x}y\right) &= 4\,\mathrm{e}^{4x} \quad \| \int \\
\mathrm{e}^{5x}y &= \mathrm{e}^{4x} + C \quad \| \cdot \mathrm{e}^{-5x} \\
y(x) &= C\,\mathrm{e}^{-5x} + \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

b) Kirjoitetaan yhtälö muotoon $y' + (-\frac{1}{x})y = -\frac{5}{2}x^2y^3$.
Parametri $k = 3$ on positiivinen, joten erikoisratkaisuna on vakiofunktio $y = 0$. Sijoitetaan $z = y^{-2}$, jolloin $y = z^{-\frac{1}{2}}$ ja $y' = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z'$

$$\begin{aligned}
&y' + (-\tfrac{1}{x})y && = -\tfrac{5}{2}x^2y^3 \\
&-\tfrac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z' + (-\tfrac{1}{x})z^{-\frac{1}{2}} && = -\tfrac{5}{2}x^2(z^{-\frac{1}{2}})^3 \\
&z' + \tfrac{2}{x}z && = 5x^2 \\
&x^2(z' + \tfrac{2}{x}z) && = 5x^2x^2 \\
&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2z) && = 5x^4 \\
&x^2z && = \textstyle\int 5x^4\,\mathrm{d}x = x^5 + C \\
&z && = x^3 + Cx^{-2}
\end{aligned}$$

Palataan alkuperäisiin muuttujiin: $y^{-2} = x^3 + Cx^{-2}$, joten $y = \pm\frac{x}{\sqrt{C+x^5}}$.
Alkuehdosta $y(1) = \frac{1}{2}$ saadaan $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{C+1}}$, joten $C = 3$ ja alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y = \frac{x}{\sqrt{3+x^5}}.$$

5. Säiliön liuosmäärä on $V(t) = 100 + t$ ja suolamäärä alussa $m(0) = 8$. Suolamäärän muutos pienellä aikavälillä

$$\mathrm{d}m = -2\frac{m}{100+t}\,\mathrm{d}t.$$

Siten alkuarvotehtävä hetkelliselle suolamäärälle voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{100+t}m,\ m(0) = 8.$$

Tämä ratkeaa esimerkiksi separoimalla. Yhtälön yleiseksi ratkaisuksi saadaan $m(t) = C(100+t)^{-2}$ ja alkuarvon toteuttava ratkaisu on

$$m(t) = \frac{8 \cdot 100^2}{(100+t)^2}.$$

Säiliössä on suolaa tunnin kuluttua $m(60) = 3{,}125$ kg.