

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 4

Tähdellä merkitty tehtävä on ns. lisäpistetehtävä.

1*. Ratkaise alkuarvotehtävä $y' + y = \sin(\omega x)$, $\omega > 0$, alkuehdolla $y(0) = 0$. Osoita, että saamasi ratkaisu todella toteuttaa alkuarvotehtävän (ts. alkuehdon ja differentiaaliyhtälön).

2. Määrää alkuarvotehtävän

$$y' + x^2y = x^2, \quad y(0) = 2$$

ratkaisu.

3. Olkoon $x > 0$. Ratkaise

a) $u' - 2x^{-1}u = 2x$,

b) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

4. a) Määrää differentiaaliyhtälön $\frac{dy}{dx} + 5y(x) = 4e^{-x}$, $x > 0$, yleinen ratkaisu.

b) Määrää differentiaaliyhtälön $xy' - y = -\frac{5}{2}x^3y^3$ ($x > 0$) yleinen ratkaisu ja se ratkaisu, joka toteuttaa ehdon $y(1) = \frac{1}{2}$.

5. Säiliössä on 100 l vettä, johon on liennut 8 kg suolaa. Tietyllä hetkellä hanat aukaistaan ja säiliöstä virtaa ulos 2 l/min sekoittunutta suolavesiliuosta. Samanaikaisesti säiliöön virtaa 3 l/min puhdasta vettä. Oletamme, että suolan liukenemisestä aiheutuva tilavuuden muutos voidaan jättää huomiotta. Johda alkuarvotehtävä hetkelliselle suolamäärälle ja ratkaise se. Paljonko säiliössä on suolaa tunnin kuluttua? Millä tekniikoilla differentiaaliyhtälön voi ratkaista?

Vastaukset:

1. $y(x) = \frac{\omega}{1+\omega^2} e^{-x} + \frac{\sin(\omega x) - \omega \cos(\omega x)}{1+\omega^2}$,

2. $y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{3}x^3}$,

3. a) $u = 2x^2 \ln(x) + Cx^2$, b) $y^2 = 2x^2 \ln(x) + Cx^2$

4. a) $y(x) = C e^{-5x} + e^{-x}$, b) $y(x) = \pm \frac{x}{\sqrt{C+x^5}}$ ja $y(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^5}}$

5. $m'(t) = -2\frac{m(t)}{100+t}$, $m(t) = C(100+t)^{-2}$, $m(60) = 3,125$ kg.