DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 3, ratkaisut

1. a) Diff.yhtälö on separoituva: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - y^2$.
Erikoisratkaisut: $y(x) = 0$ ja $y(x) = 1$

$$\begin{aligned} &\text{Muuttujien separointi}: \tfrac{\mathrm{d}y}{y-y^2} = \mathrm{d}x. \\ &\text{Integrointi}: \textstyle\int \tfrac{1}{y-y^2}\,\mathrm{d}y = \int 1 \cdot \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Yhtälön vasemmalla puolella käytetään osamurtokehitelmää:

$$\frac{1}{y-y^2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}.$$

Integrointi:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right)\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x \\ &\ln(|y|) - \ln(|1-y|) = x + C_0 \\ &\ln\left(\left|\tfrac{y}{1-y}\right|\right) = x + C_0 \\ &\left|\tfrac{y}{1-y}\right| = \mathrm{e}^{x+C_0} = \mathrm{e}^{C_0}\,\mathrm{e}^x = C_1\,\mathrm{e}^x,\ C_1 > 0 \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \tfrac{y}{1-y} = C\,\mathrm{e}^x,\ C \in \mathbb{R} &\Rightarrow\ (1 + C\,\mathrm{e}^x)y = C\,\mathrm{e}^x \\ y(x) &= \tfrac{C\,\mathrm{e}^x}{1+C\,\mathrm{e}^x}. \end{aligned}$$

Erikoisratkaisu $y(x) = 1$.

b) Diff.yhtälö $y' = \mathrm{e}^{2y}$ on separoituva:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y &= \mathrm{d}x \\ \int \mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x \\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2y} &= x + C_0 \\ \mathrm{e}^{-2y} &= -2x - 2C_0, \quad |\ln(\dots) \\ -2y &= \ln(-2x + C_1) \Rightarrow\ y(x) = -\frac{1}{2}\ln(-2x + C_1),\ C_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ratkaisu määritelty, kun $-2x + C_1 > 0$.

c) Diff.yhtälö

$$y' = 1 + y^2$$

on separoituva.

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \mathrm{d}x \quad &\Rightarrow \quad \arctan(y) = x + C \\ &\Rightarrow \quad y(x) = \tan(x + C). \end{aligned}$$

2. a) Yhtälö on separoituva, sillä se voidaan kiroittaa muotoon

$$y'(x) = (y+3) \cdot \frac{-2x}{x^2-4}.$$

Erikoisratkaisu saadaan yhtälöstä $y+3=0$ eli $y=-3$. Kun $y \neq -3$, saadaan separoimalla

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y+3} &= \frac{-2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y+3} &= \int -\frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x \\
\ln|y+3| &= \ln|\frac{1}{x^2-4}| + \ln(|C|) \\
y+3 &= \frac{C}{x^2-4} \\
y(x) &= -3 + \frac{C}{x^2-4}, \quad x \neq \pm 2.
\end{aligned}$$

Huomaa, että kussakin kohdassa olemme käyttäneet geneeristä vakiota C.

b) Alkuehto: $y(0) = -2 = -3 - \frac{C}{4}$. Siten $C = -4$

c) Yhtälön erikoisratkaisu on $y_0(x) = -3$ ja se on stabiili, sillä ratkaisu lähestyy tasapainotilaa, kun x kasvaa:

$$\lim_{x\to\infty} -3 + \frac{C}{x^2-4} = -3 \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

3. Yhtälö on separoituva:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+4}, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+4}, \\
&\ln(|y|) = \ln\Big((x^2+4)^{-1}\Big) + C = \ln\Big(\frac{|A|}{x^2+4}\Big), \quad |A| = \mathrm{e}^C, \\
&y(x) = \frac{A}{x^2+4}, \; A \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Alkuehto:

$$y(2) = \frac{A}{2^2+4} = \frac{A}{8} = 1 \Rightarrow \; A = 8.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu:

$$y(x) = \frac{8}{x^2+4}.$$

Tehtävän 4 ratk.

a) Suoritetaan sopiva skaalaus saadaksemme helpommat yhtälöt. Valitaan peurojen lukumäärää kuvaavaksi funktioksi $x(t) = \frac{y(t)}{160000}$ ja ajan yksiköksi vuosi. Tällöin kantaa kuvaava differentiaaliyhtälö on ($p = \frac{N}{160000}$ yksikköä):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\Big(1 - x\Big) - \frac{3}{16},$$

missä $a = 3/16 = \frac{30000}{160000}$ on skaalattu kaatolupien määrä.

b) Yhtälö on separoituva

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -x^2 + x - \frac{3}{16} \\
\frac{-1\,\mathrm{d}x}{x^2 - x + \frac{3}{16}} &= \mathrm{d}t| \text{ integroidaan puolittain} \\
\int \frac{-1\,\mathrm{d}x}{x^2 - x + \frac{3}{16}} &= \int \mathrm{d}t = t + D.
\end{aligned}$$

Vasemmalla puolella oleva integraali laskettiin harjoituksessa 1 (kts. harjoitus 1, tehtävä 2). Näin ollen funktio $x(t)$ ratkaistaan yhtälöstä

$$\ln\Big(|\frac{x - \frac{1}{4}}{x - \frac{3}{4}}|\Big) = t/2 + D/2.$$

Logaritmin käänteisfunktio on eksponenttifunktio, jota soveltamalla puolittain saadaan

$$|\frac{x - \frac{1}{4}}{x - \frac{3}{4}}| = \mathrm{e}^{t/2 + D/2} = |C|\,\mathrm{e}^{t/2}.$$

Ratkaistaan yhtälöstä x:

$$x(t) = \frac{1}{4}\Big(\frac{1 - 3C\,\mathrm{e}^{t/2}}{1 - C\,\mathrm{e}^{t/2}}\Big) = \frac{3}{4}\Big(\frac{1 - \frac{\tilde{C}}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1 - \tilde{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}\Big), \; \tilde{C} = \frac{1}{C} \in \mathbb{R}.$$

Alkuehto: $x(0) = 80000/160000 = \frac{1}{2} = \frac{1-3C}{4-4C}$, mistä voidaan ratkaista vakio C: $C = -1$. Näin ollen alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$x(t) = \frac{3}{4}\Big(\frac{1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1 + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}\Big) \to \frac{3}{4}, \text{ kun } t \to \infty.$$

Siis ollen pitkän ajan kuluessa peurapopulaatio stabiloituu 120 000 yksilöön ($y = x \times 160000$).

c) Yhtälön erityisratkaisut saadaan oikean puolen nollakohdista:

$$x^2 - x + a = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a}.$$

Yhtälöllä on

1. kaksi reaalista juurta, kun $a < \frac{1}{4}$,
2. kaksoisjuuri, kun $a = \frac{1}{4}$,
3. ei reaalisia ratkaisuja, kun $a > \frac{1}{4}$.

Tapaus 1, $0 < a < \frac{1}{4}$: Erikoisratkaisut ovat $x(t) = x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}$ ja $x(t) = x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}$, $x_1 > x_2$.
Erikoisratkaisujen l. tasapainotilojen laatu riippuu ratkaisun x derivaatan merkistä. Jos alussa $x > x_1 > x_2$, niin $x'(t) = -(x - x_1)(x - x_2) < 0$ ja ratkaisu on vähenevä. Tällöin peurakanta lähestyy tasapainotilaa x_1.
Mikäli peurakannan koko $x_1 > x > x_2$, niin $x'(t) > 0$ ja peurakanta kasvaa lähestyen tilaa x_1. Jos taas $x_1 > x_2 > x$, niin $x'(t) < 0$ ja peurakanta kutistuu ja lopulta koittaa sukupuutto.
Tapaus 2, $a = \frac{1}{4}$: Tällöin tasapainotila on vakiofunktio $x_1(t) = \frac{1}{2}$. Tällöin yhtälö on myös separoituva

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -(x - \frac{1}{2})^2.$$

Separoimalla muuttujat integroimalla puolittain saadaan ratkaisu

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}x}{(x - \frac{1}{2})^2} &= \mathrm{d}t \\
\int_x -\frac{\mathrm{d}x}{(x - \frac{1}{2})^2} &= \int_t \mathrm{d}t \\
\frac{1}{x - \frac{1}{2}} &= t + C \\
x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{t + C}.
\end{aligned}$$

Jos alussa $x(0) = n_0 > \frac{1}{2}$, niin integroimisvakio $C = \frac{1}{n_0 - \frac{1}{2}} > 0$ ja ratkaisu $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t+C} \to \frac{1}{2}$, kun $t \to \infty$.
Mutta mikäli alussa $x(0) = n_0 < \frac{1}{2}$, niin $C = \frac{1}{n_0 - \frac{1}{2}} < 0$ ja ratkaisu $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t+C} \to -\infty$, kun $t \to \frac{1}{2} - n_0$. Toisin sanoen peuroille koittaa sukupuutto äärellisessä ajassa.
Tapaus 3, $a > \frac{1}{4}$: Tällöin koittaa joka tapauksessa sukupuutto, koska tasapainotiloja ei ole ja $x'(t) < 0$ aina.

d) $x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{38}{160}} \approx 0.6118034$ l. peurakannan stabiilin populaation todellinen koko on $y = x_1 \times 160000 \approx 97889$ yksilöä.

e) Jos $a > \frac{1}{4}$, oikean puolen lauseke yhtälössä

$$x'(t) = -x^2 + x - a$$

on aina negatiivinen ja peuroille koittaa sukupuutto. Kriittinen kaatolupien määrä on $b = \frac{1}{4} \times 160000 = 40000$.