DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 3

Tähdellä merkitty tehtävä on ns. lisäpistetehtävä.

1. Ratkaise funktio y seuraavista yhtälöistä:

   a) $y' = y - y^2$
   b) $y' = \mathrm{e}^{2y}$
   c) $y' = 1 + y^2$

2*. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2xy - 6x}{x^2 - 4}.$$

   a) Määrää yhtälön yleinen ratkaisu.

   b) Määrää se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = -2$.

   c) Yhtälöllä on erikoisratkaisu $y(x) = Y_0$, joka on samalla differentiaaliyhtälön tasapainotila. Määrää ko. erikoisratkaisu. Onko tasapainotila stabiili, so. lähestyykö ratkaisu erikoisratkaisua, kun $x \to \infty$?

3. Määrää differentiaaliyhtälön

$$(x^2 + 4)y' = -2xy$$

yleinen ratkaisu ja määrää se yksityisratkaisu, joka saa pisteessä $x = 2$ arvon 1, l. $y(2) = 1$. Luonnostele ratkaisukäyrän kuvaaja.

Käyrä tunnetaan matemaattisessa kirjallisuudessa nimellä "the Witch of Agnesi" italialaisen matemaatikon Maria Agnesin mukaan. Todellisuudessa käyrällä ei ole mitään tekemistä noitien tai noituuden kanssa. Nimi johtuu pieleen menneestä käännöksestä italian kielestä englanniksi.

4. Luonnonvarakeskuksen Luken arvion (vuodelta 2017) mukaan Suomen metsissä elää n. 80 kilopeuraa (1 kilopeura on 1000 peuraa). Tarkemmin ottaen tässä tarkoitetaan valkohäntäpeuraa. Kuhmon peura on erikseen, mutta tunnetusti Kuhmon peurat aina eksyvät (kuin myös Vaalan Karhut).

Oletetaan, että ilman metsästystä peurakanta $y(t)$ noudattaa logistista mallia $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{N}(N - y)$, missä stabiilin peurakannan koko on $N = 160\ 000$ yksilöä. Seuraavassa tutkitaan, mikä vaikutus kiinteällä vuotuisella kaatolupien määrällä b on peurakantaan.

   (a) Määrää mallia kuvaava differentiaaliyhtälö. Valitse sopivat yksiköt peurojen määrille ja ajalle.

   (b) Määrää alkuarvotehtävän ratkaisu, kun alkutilana pidetään vuoden 2017 arvioitua peurakannan kokoa ja kaatolupien määrä on $b = 30000$. Mikä on peurakanta populaation koko pitkän ajan kuluttua?

   (c) Vaikuttaa siltä, että joillain metsästysmäärillä yhtälöllä on kaksi, täsmälleen yksi tai ei yhtään erityisratkaisua. Määrää ne b:n arvot, joilla yhtälöllä on kaksi erityisratkaisua. Mikä on ko. ratkaisuiden luonne. Ovatko ne stabiileja, epästabiileja tai semistabiileja? Systeemin tasapainotila on stabiili, jos systeemin ei-vakioratkaisut suppenevat sitä kohti. Tasapainotila on epästabiili, mikäli tasapainotilan lähellä olevat ratkaisut loittenevat siitä. Tasapainotila on semi-stabiili, mikäli sen yläpuolella olevat alkutilat suppenevat tasapainotilaa kohti ja alapuolella olevat alkutilat loittonevat siitä.

(d) Suomen riistakeskus päätti vuotuiseksi kaatolupien määräksi $b = 38000$. Mikä on tällä kaatomäärällä stabiilin populaation koko?

(e) Mikä on kriittinen kaatolupien määrä b, minkä ylittyessä peurakanta romahtaa?

Vastauksia:

1. a) $y(x) = \frac{C\,\mathrm{e}^x}{1+C\,\mathrm{e}^x},\ C \in \mathbb{R},\ y_0(x) = 1$, b) $x + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2y} = C,\ C \in \mathbb{R}$, c) $y(x) = \tan(x + C)$

2. $y(x) = -3 + \frac{C}{x^2-4}$

3. $y(x) = \frac{8}{x^2+4}$.

4. b) $x(t) = \frac{3}{4}\left(\frac{1+\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-t/2}}{1+\mathrm{e}^{-t/2}}\right.$, c) Erikoisratkaisut: $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a}$, d) peurakannan stabiili kanta on 97889 yksilöä.

Viittauksia: Maria Agnesi (16.5.1718-9.1.1799) oli italialainen matemaatikko, kielitieteilijä ja filosofi, vanhin Pietro Agnesin 21:stä lapsesta. Hän oli yksi ensimmäisistä naispuolisista professoreista. Toimi Bolognan yliopistossa opettajana.