DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 2, ratkaisut

1. a)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 3\,\mathrm{d}x \\
\ln(|y|) &= 3x + \ln(|C|) \\
y(x) &= C\,\mathrm{e}^{3x}.
\end{aligned}
$$

Alkuehto: $y(1) = 2 \Rightarrow\ C = 2\,\mathrm{e}^{-3}$.
Ratkaisu: $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-3}\,\mathrm{e}^{3x} = 2\,\mathrm{e}^{3(x-1)}$.

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -2\,\mathrm{d}x \\
\ln(|y|) &= -2x + \ln(|C|) \\
y(x) &= C\,\mathrm{e}^{-2x}.
\end{aligned}
$$

Alkuehto: $y(1) = 1 \Rightarrow\ C = \mathrm{e}^{2}$.
Ratkaisu: $y(x) = \mathrm{e}^{2}\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2-2x}$.

2. Differentiaaliyhtälön muodostaminen:

$$
\underset{\text{muutosnopeus}}{m'(t)} = \underset{\text{verr.kerroin}}{-k} \cdot \underset{\text{nykytila}}{m(t)}
$$

Muuttujien separointi: $\frac{\mathrm{d}m}{m} = -k\,\mathrm{d}t$.
Integrointi:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m}{m} &= -k\int \mathrm{d}t, \\
\ln(m) &= -kt + \ln(C), \quad (m(t) > 0,\ C > 0) \\
m(t) &= C\,\mathrm{e}^{-kt}.
\end{aligned}
$$

Alkuehto: $m(0) = C = M \Rightarrow\ m(t) = M\,\mathrm{e}^{-kt}$.
Ratkaistaan k: Mittaustiedon nojalla $m(1) = M\,\mathrm{e}^{-k} = 0.8M$. Siten

$$k = -\ln(0.8).$$

Ratkaistaan puoliintumisaika t_p:

$$
\begin{aligned}
m(t_p) &= M\,\mathrm{e}^{-kt_p} = 0.5M, \\
\Rightarrow\ -kt_p &= \ln(0.5), \\
t_p &= \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.8)} \approx 3\text{ h } 6\text{ min}
\end{aligned}
$$

3. Valitaan uusi funktio $H(t) = T(t) - T_0 = T(t) - 20$. Tällöin sen derivaatta on $H'(t) = T'(t)$, ja se toteuttaa differentiaaliyhtälön $H'(t) = -kH(t)$ alkuehdolla $H(0) = 100 - 20 = 80$. Yhtälö on separoituva:

$$\int \frac{dH}{H} = \int (-k)\, dt \quad \Rightarrow \ln(|H|) = -kt + C.$$

Tällöin $|H(t)| = \mathrm{e}^{-kt+C} = \mathrm{e}^{C}\,\mathrm{e}^{-kt}$, joten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on eksponentiaalisesti vaimeneva l. $H(t) = A\,\mathrm{e}^{-kt}$.
Käytettämällä alkuehtoa ja tietoa, että 2 minuutin kahvin ja ympäristön välinen lämpötila ero on $H(2) = 80 - 20 = 60$, voidaan verrannollisuuskerroin ja ja vakio A ratkaista:

$$\begin{aligned}
&H(0) = A\,\mathrm{e}^{0} = A = 80,\\
&H(2) = 80\,\mathrm{e}^{-2k} = 60, \quad \Rightarrow \quad -2k = \ln(\frac{3}{4}), \Rightarrow\ k = -\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4}).
\end{aligned}$$

Kahvin lämpötila on 70 astetta, kun $H(t_1) = 80\,\mathrm{e}^{-kt_1} = 50$. Tämä lämpötila saavutetaan, kun

$$-kt_1 = \ln(\frac{5}{8}) \quad \Rightarrow\ t_1 = 2\frac{\ln(8/5)}{\ln(4/3)}.$$

Kahvin lämpötila on 60-astetta, kun $H(t_0) = 60 - 20 = 40$ eli

$$80\,\mathrm{e}^{\left(\frac{t_0}{2}\ln(\frac{3}{4})\right)} = 40\ \Rightarrow\ \frac{t_0}{2}\ln(\frac{3}{4}) = \ln(\frac{1}{2})\ \Rightarrow\ t_0 = \frac{2\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{3}{4})}.$$

Kahvi on juotava 4 min 49 sekunnissa.

Tehtävän 4 ratkaisu

(a) Valitaan lohien lukumääräksi $y(t)$, missä perusaikayksikkönä on vuosi. Tällöin muutosnopeus $y'(t)$ noudattaa sääntöä

$$\underbrace{y'(t)}_{\text{muutosnopeus}} = \underbrace{k}_{\text{lisääntymiskerroin}} \cdot \underbrace{y(t)}_{\text{nykytila}} - \underbrace{a}_{\text{vuotuinen pyynti}},$$

so. $y'(t) = ky(t) - a$.

(b) Mikäli $a = 0$, niin ko. mallin differentiaaliyhtälö on $y'(t) = ky(t)$, mikä voidaan ratkaista muuttujien separointimenetelmällä:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= k\,\mathrm{d}t \quad | \text{ integroidaan puolittain}\\
\ln(|y|) &= kt + \ln(|C|) \quad | \text{ eksponenttifunktio puolittain}\\
\mathrm{e}^{\ln(|y|)} &= \mathrm{e}^{kt+\ln(|C|)} = |C|\,\mathrm{e}^{kt}\\
y(t) &= C\,\mathrm{e}^{kt}.
\end{aligned}$$

Kaksiintumisaika t_0: $y(t_0) = 2y(0)$. Alussa $y(0) = C$ ja ajanhetkellä t_0 lohien lukumäärä on $y(t_0) = C\,\mathrm{e}^{kt_0}$. Siten t_0 ratkaistaan yhtälöstä

$$\mathrm{e}^{kt_0} = 2\ \Rightarrow\ t_0 = \frac{1}{k}\ln 2.$$

(c) Ratkaistaan yhtälö $y'(t) = ky(t) - a$ muuttujien separointimenetelmällä:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{ky-a} &= \mathrm{d}t \quad | \text{ integroidaan puolittain} \\
\frac{1}{k}\ln(|ky-a|) &= t + \ln(|A|) \\
\ln(|ky-a|) &= kt + \ln(|C|)| \quad \text{eksponenttifunktio puolittain} \\
\mathrm{e}^{\ln(|ky-a|)} &= \mathrm{e}^{kt+\ln(|C|)} = |C|\,\mathrm{e}^{kt} \\
ky(t) - a &= C\,\mathrm{e}^{kt} \\
y(t) &= \frac{a}{k} + C\,\mathrm{e}^{kt}.
\end{aligned}$$

Annetuilla vakioilla ratkaisu on $y(t) = 275000 + C\,\mathrm{e}^{0.2t}$.

(d) Tasapainotila saavutetaan, kun lohikanta ei muutu lainkaan eli se on vakio ($C = 0$). Tällöin lohipopulaation koko on $y(t) = 275\ 000$ yksilöä mikäli vuotuinen pyyntikiintiö on vakio $a = 55\ 000$ lohta.

(e) Mikäli alussa $y(0) = \frac{a}{2k} = \frac{a}{k} + C\,\mathrm{e}^{k\cdot 0}$, niin vakio $C = -\frac{a}{2k}$ ja ratkaisu

$$y(t) = \frac{a}{k} - \frac{a}{2k}\,\mathrm{e}^{kt}$$

ja siten ratkaisu on vähenevä $y'(t) < 0$ kaikilla $t > 0$. Lohikanta pienenee ja lopulta häviää - **äärellisessä ajassa**.

Jos alussa $y(0) = \frac{2a}{k} = \frac{a}{k} + C$, niin $C = \frac{a}{k}$ ratkaisu on

$$y(t) = \frac{a}{k}(1 + \mathrm{e}^{kt}) \to +\infty, \text{ kun } t \to +\infty.$$

Siis mikäli alussa kanta on terveellä pohjalla l. suurempi kuin tasapainotila, niin lohikanta kasvaa ikuisesti. Edellyttäen tietysti, että lohenpyyntikiintiö pidetään vakiona a.

5. **a-kohta**. Yhtälö on separoituva, joten muuttujien erottelulla

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x \quad \text{integroidaan puolittain} \\
\ln(|y|) &= \cos(2\pi x) + C \\
|y(x)| &= \mathrm{e}^{C}\,\mathrm{e}^{\cos(2\pi x)}.
\end{aligned}$$

Poistamalla itseisarvomerkit ja merkitsemällä $A = \pm\,\mathrm{e}^{C}$ saadaan yleiseksi ratkaisuksi

$$y(x) = A\,\mathrm{e}^{\cos(2\pi x)}.$$

Alkuehdon toteuttava ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
1 = y(0) &= A\,\mathrm{e}^{\cos(0)} = A \\
y(x) &= \mathrm{e}^{\cos(2\pi x)}.
\end{aligned}
$$

b-kohta: Yhtälö on separoituva:

$$
\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y(x)} &= -a(x) \\
\int_0^x \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^x a(x)\,\mathrm{d}x \\
y(x) &= \lambda\,\mathrm{e}^{-\int_0^x a(x)\,\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

Ratkaisut 1-periodisia, jos ja vain jos kaikilla $x \in \mathbb{R}:\; y(x+1) = y(x)$.
Tällöin on oltava voimassa

$$
\begin{aligned}
y(x+1) &= \lambda\,\mathrm{e}^{-\int_0^{x+1} a(x)\,\mathrm{d}x} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\int_0^{x} a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{-\int_x^{x+1} a(x)\,\mathrm{d}x} \\
&= \mathrm{e}^{-\int_x^{x+1} a(x)\,\mathrm{d}x} y(x) = y(x).
\end{aligned}
$$

Tämä on mahdollista jos ja vain jos

$$
\mathrm{e}^{-\int_x^{x+1} a(x)\,\mathrm{d}x} = 1 \;\Leftrightarrow\; \int_x^{x+1} a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 a(x)\,\mathrm{d}x = 0.
$$