

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 2

Tähdellä merkitty tehtävä on ns. lisäpistetehtävä.

1. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät:

- a) $y' = 3y$, $y(1) = 2$,
- b) $y' = -2y$, $y(1) = 1$.

2. Erään radioaktiivisen aineen hajoamisnopeus on suoraan verrannollinen aineen hetkelliseen määrään. Aineen hetkellistä määrää ajanhetkellä $t > 0$ kuvaa funktio $m(t)$. Fysikaalinen verrannollisuuskerroin k on positiivinen vakio. Kirjoita hajoamista kuvaava differentiaaliyhtälö ja ratkaise se alkuehdolla $m(0) = M$. Aineen havaittiin vähentyneen 20% yhdessä tunnissa. Mikä on kyseisen aineen puoliintumisaika?

3*. Tässä tehtävässä käytetään Newtonin jäähtymislakia differentiaaliyhtälön muodostamiseen. Lämpötilan muutosnopeus on verrannollinen kahvin lämpötilan ja ympäristön lämpötilan erotukseen.

Professori valmistaa etätoimistossa kupillisen kahvia kiehuvaan veteen - $100\text{ }^\circ\text{C}$. Etätoimiston vakiolämpötila on $20\text{ }^\circ\text{C}$. Alussa kahvi on aivan liian kuumaa juotavaksi - 100-asteista . Niinpä professori antaa kahvin jäähtyä. Hän soveltaa kahvin jäähtymiseen Newtonin jäähtymislakia, jonka mukaan lämpötilan muutosnopeus on verrannollinen kahvin lämpötilan ja ympäristön lämpötilan erotukseen, so. lämpötila $T(t)$ on differentiaaliyhtälön

$$T'(t) = -k(T(t) - T_0)$$

ratkaisu, missä $T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$.

Pahaksi onneksi hän ei tiedä verrannollisuuskertoimen k suuruutta. Hän tekee yhden mittauksen: kahden minuutin kuluttua kahvi on jäähtynyt $80\text{ }^\circ\text{C}$ lämpötilaan. Sekin tuntuu vielä liian kuumalta. Entisenä baristana hän tietää, että parhaan kahvinautinnon saa, kun kahvi on 70-asteista . Milloin tämä tämä lämpötila on saavutettu? Entisenä baristana hän myös tietää, että parhaat aromitasot säilyvät aina 60-asteiseksi asti. Kuinka nopeasti kahvi on juotava?

4. Pohjois-eurooppalaisessa valtiossa, missä ihmiset puhuvat perin kummallista kieltä, pohditaan kestäväällä pohjalla olevaa lohienkalastusstrategiaa. Käytössä on seuraavanlainen yksinkertaistettu malli: Lohikannan luontainen lisääntymiskerroin $k > 0$ oletetaan vakioksi kuten vuotuinen lohienpyyntikiintiö a (kappale/vuosi).

Tehtävät:

- (a) Kirjoita lohikannan kehitystä kuvaava differentiaaliyhtälö (Ensiaskel: valitse symbolit ja yksiköt).
- (b) Olettaen, että $a = 0$, mikä on kaksintumisaika, so. missä ajassa populaation koko kaksinkertaistuu.
- (c) Määrää yhtälön yleinen ratkaisu, kun $a = 55000$ ja $k = 0.2$.
- (d) Systeemillä on "tasapainotila" tai vakiotila. Määrää se.
- (e) Tutki, miten lohikanta käyttäytyy eri alkuehdoilla. Tutki erikseen kannan käyttäytymistä, kun lohikannan koko alussa on suurempi tai pienempi kuin tasapainotila. Mitä tapahtuu, kun alussa lohikanta on puolet tasapainotilassa olevasta lohikannasta, tai lohikanta on kaksi kertaa suurempi kuin tasapainotilan koko?

5. Yhden muuttujan reaaliarvoinen funktio $f(x)$ on 1-periodinen, jos sille on voimassa ehto

$$f(x+1) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esimerkiksi funktio $f(x) = \sin(2\pi x)$ on 1-periodinen.

- a) Määrää alkuarvottehtävän

$$\begin{aligned} y'(x) + \sin(2\pi x)y(x) &= 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

ratkaisu.

- b) Tarkastellaan 1. kertaluvun yhtälöä

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

Millä ehdoilla yhtälön ratkaisut ovat 1-periodisia?

Vastaukset:

- a) $y(x) = 2e^{3(x-1)}$, b) $y(x) = e^{-2(x-1)}$
- $m(t) = M e^{-kt}$, puoliintumisaika on noin 3 tuntia 6 minuuttia,
- $k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$, $T(t) = 20 + 80e^{-kt}$, lämpötila 70 astetta, kun $t = 2\frac{\ln\left(\frac{8}{5}\right)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$; ja kahvi pitää juoda 4 min 49 sekunnissa.
- $y(t) = 275000 + C e^{0.2t}$. Tasapainotila, kun $a = 55000$ ja silloin $y(t) = 275000$.
- a) $y(x) = \exp\left(\frac{\cos(2\pi x) - 1}{2\pi}\right)$.