DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 1, ratkaisut

1. Rationaalifunktion $Y(x) = \frac{x^2-6x-4}{x(x+1)(x-2)}$ osoittajan $x^2 - 6x - 4$ nollakohdat ovat $a = 3 \pm \sqrt{13}$ ja siten osoittajalla ja nimittäjällä on eri nollakohdat. Tällöin osamurtokehitelmä voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} Y(x) = \frac{x^2-6x-4}{x(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{(A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A}{x(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

Vertaamalla $Y(x)$:n osoittajan kertoimia oikean puolen lausekkeeseen saadaan kertoimille $A,\ B,\ C$ yhtälöryhmä:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ -A-2B+C &= -6 \\ -2A &= -4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 2 \\ B+C &= -1 \\ -2B+C &= -4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 2 \\ B+C &= -1 \\ -3B &= -3 \end{aligned}$$

Siten kertoimet ovat $A = 2,\ B = 1,\ C = -2$ ja osamurtokehitelmä on

$$Y(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2}.$$

2. Funktion $\frac{2}{(y-1)(y-2)}$ osamurtokehitelmä:

$$g(y) = \frac{2}{(y-1)(y-2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-2} = \frac{Ay - 2A - B + By}{(y-1)(y-2)}.$$

Yhtälö voimassa, kun

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 2A+B &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= -2 \\ B &= 2 \end{aligned}$$

Integrointi:

$$\int g(y)dy = 2\int -\frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y + \int \frac{1}{y-2}\,\mathrm{d}y = -2\ln(|y-1|) + 2\ln(|y-2|) + C'.$$

$$G(y) = \ln\left(|C|\left|\frac{y-2}{y-1}\right|^2\right) \quad (C' = \ln(|C|))$$

3. Integroitava funktio: $f(x) = \frac{-1}{x^2-x+\frac{3}{16}}$. Nimittäjän nollakohdat ovat $x_1 = \frac{3}{4}$ ja $x_2 = \frac{1}{4}$. Osamurtokehitelmä:

$$\frac{-1}{x^2 - x + \frac{3}{16}} = \frac{A}{x - \frac{3}{4}} + \frac{B}{x - \frac{1}{4}} = \frac{(-\frac{1}{4}A - \frac{3}{4}B) + (A+B)x}{x^2 - x + \frac{3}{16}}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ \frac{1}{4}A+\frac{3}{4}B=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ A=-2,\ B=2,$$

Integrointi:

$$\int \frac{-1}{x^2-x+\frac{3}{16}}\,\mathrm{d}x = \int \Big(\frac{2}{x-\frac{1}{4}} - \frac{2}{x-\frac{3}{4}}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int \frac{-1}{x^2-x+\frac{3}{16}}\,\mathrm{d}x = 2\ln(|x-\frac{1}{4}|) - 2\ln(|x-\frac{3}{4}|) + \tilde{C},\ \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

Integraalifunktiot ovat

$$\ln(\frac{(x-\frac{1}{4})^2}{(x-\frac{3}{4})^2}) + \tilde{C}.$$

4. Eksponenttifunktion $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ 1. ja 2. derivaatta ovat $y'(t) = r\,\mathrm{e}^{rt}$ ja $y''(t) = r^2\,\mathrm{e}^{rt}$. Näin ollen sijoittamalla $y''(t)$ ja $y(t)$ yhtälöön saadaan

$$y''(t) - 4y(t) = r^2\,\mathrm{e}^{rt} - 4\,\mathrm{e}^{rt} = \Big(r^2-4\Big)\,\mathrm{e}^{rt} = 0.$$

Koska eksponenttifunktio on aina nollasta eroava, niin välttämättä $r^2 = 2$ l. $r = \pm 2$.
5. Funktio $y(x) = C\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}$ on yhtälön ratkaisu. Funktion derivaatta on $y'(x) = C\,3x\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x^2}$. Muodostetaan yhtälön oikean puolen lauseke:

$$x(3y+1) = x(3C\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x^2} - 1 + 1) = C\,3x\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x^2} = y'(x).$$