

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 1

Tähdellä merkitty tehtävä on ns. lisäpistetehtävä.

Usein differentiaaliyhtälön ratkaiseminen palautuu funktion integraalifunktion määrittämiseen. Tehtävissä 2.-3. kerrataan tyypillisimpiä kursilla vastaantulevia integroimistehtäviä. Tehtävässä 1 harjoitellaan rationaalifunktion osamurtokehityksen tekemistä - hyödyllinen taito myös muilla matematiikan kursseilla.

1. Määrittää rationaalifunktion $Y(x) = \frac{x^2-6x-4}{x(x+1)(x-2)}$ osamurtokehityksen - ilman laskinta.

2. Laske rationaalifunktion

$$g(y) = \frac{2}{(y-1)(y-2)}$$

integraalifunktio (ilman laskinta)

$$G(y) = \int g(y) dy.$$

3*. Määrittää funktion $f(x) = \frac{1}{x(1-x)-\frac{3}{16}}$ integraalifunktio(t)

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Oleellinen osa differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisesta on ratkaisun tarkistaminen. Sitä harjoitellaan seuraavissa tehtävissä:

4. Millä vakion $r \in \mathbb{R}$ arvoilla funktio $y(t) = e^{rt}$ on differentiaaliyhtälön

$$y''(t) - 4y(t) = 0$$

ratkaisu?

5. Mikä seuraavista funktioista on differentiaaliyhtälön $\frac{dy}{dx} = x(3y+1)$ ratkaisu:

a) $y(x) = C e^{\frac{3}{2}x} - 1,$

b) $y(x) = C e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3},$

c) $y(x) = Ax^3 + x - 1.$

Vastauksia:

1 $Y(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2},$

2 $G(y) = \ln \left(C \left| \frac{y-2}{y-1} \right|^2 \right), C > 0$

4 $r = \pm 2$