DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 11, ratkaisut

1. a) Ensimmäisestä yhtälöstä ratkaistaan

$$z = \frac{1}{6}y' + \frac{2}{3}y,$$
$$z' = \frac{1}{6}y'' + \frac{2}{3}y'.$$

Sijoitetaan z ja z' toiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} z' = \frac{1}{6}y'' + \frac{2}{3}y' = -3y + \frac{5}{6}y' + \frac{10}{3}y \ &\Rightarrow\ \frac{1}{6}y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{3}y = 0 \\ &\Rightarrow\ y'' - y' - 2y = 0. \end{aligned}$$

Karakteristinen yhtälö: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, jonka juuret ovat $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$. Siten

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ja

$$z(t) = \frac{1}{6}\Big(2C_1\,\mathrm{e}^{2t} - C_2\,\mathrm{e}^{-t}\Big) + \frac{2}{3}\Big(C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\Big) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{C_2}{2}\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Alkuehdot:

$$\begin{matrix} y(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ z(0) = C_1 + \frac{C_2}{2} = 2 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{matrix}.$$

1. b) Diff.yhtälösysteemi:

$$y' = z + 1,$$
$$z' = -y.$$

Toisesta yhtälöstä saadaan $y' = -z''$, mikä sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön. Siten z:lle saadaan epähomogeeninen yhtälö

$$-z'' = z + 1 \quad\Rightarrow\quad z'' + z = -1.$$

Homogeeniyhtälön $z'' + z = 0$ yleinen ratkaisu on

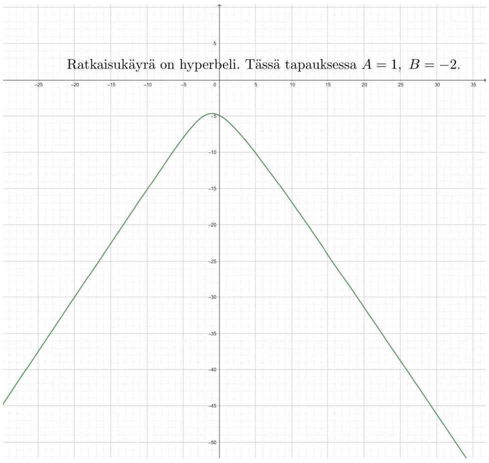
$$z_h(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$

Epähomogeeniyhtälön yksityisratkaisu saadaan määräämättömien kertoimien menetelmällä: $z_0(x) = -1$. Yleinen ratkaisu on siten

$$z(x) = A\cos(x) + B\sin(x) - 1.$$

Funktio $y(x) = -z'(x)$ on siten

$$y(x) = B\cos(x) - A\sin(x).$$



2. Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä y, jolloin

$$y = x' + \frac{1}{2}x \quad \text{ja} \quad y' = x'' + \frac{1}{2}x'.$$

Sijoittamalla y ja sen derivaatta y' alempaan yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} x'' + \frac{1}{2}x' &= \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}(x' + \frac{1}{2}x) \\ x'' + x' - 2x &= 0. \end{aligned}$$

Karakteristinen yhtälö: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Sen juuret ovat $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$. Homogeeniyhtälön yleiseksi ratkaisuksi $x(t)$ saadaan

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-2t} + B\,\mathrm{e}^{t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Koska $y = x' + \frac{1}{2}x$, niin

$$y(t) = -2A\,\mathrm{e}^{-2t} + B\,\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2}(A\,\mathrm{e}^{-2t} + B\,\mathrm{e}^{t}) = -\frac{3}{2}A\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}B\,\mathrm{e}^{t}.$$

Koska karakteristisen yhtälön juuret ovat erimerkkiset, niin tasapainotila on epästabiili satulapiste. Ratkaisukäyrät xy-tasossa ovat hyperbelejä. Ao. kuvassa on piirrettynä ratkaisukäyrä, kun $A = 1$, $B = -2$ ja aika t on välillä $[-10, 10]$.

3.

- Yhtälösysteemi:

$$\begin{aligned} y' &= -2z, \\ z' &= 2y + \mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

- Derivoidaan ensimmäinen yhtälö: $z' = -\frac{1}{2}y''$.
- Sijoitetaan $z = -\frac{1}{2}y'$ ja $z' = -\frac{1}{2}y''$ toiseen yhtälöön. Tällöin y toteuttaa 2. kertaluvun yhtälön

$$-\frac{1}{2}y'' = 2y + \mathrm{e}^{-x} \;\Rightarrow\; y'' + 4y = -2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

- Homogeeniyhtälön $y_h'' + 4y_h = 0$ yleinen ratkaisu on

$$y_h(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Epähomogeeniyhtälön yksityisratkaisuyrite $y_0(x) = A\,\mathrm{e}^{-x}$, $(y_0'(x) = -A\,\mathrm{e}^{-x}$, $y_0'' = A\,\mathrm{e}^{-x})$ sijoitetaan yhtälöön:

$$\begin{aligned} y_0'' + 4y_0 &= A\,\mathrm{e}^{-x} + 4A\,\mathrm{e}^{-x} = 5A\,\mathrm{e}^{-x} \equiv -2\,\mathrm{e}^{-x}) \\ A &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

- $y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) - \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{-x}$.

• Siten

$$z(x) = -\frac{1}{2}y'(x) = -C_2\cos(2x) + C_1\sin(2x) - \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu:

$$\begin{array}{l} y(0) = C_1 - \frac{2}{5} = 5 \\ z(0) = -C_2 - \frac{1}{5} = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} C_1 = \frac{27}{5} \\ C_2 = -\frac{11}{5} \end{array}$$

4 Vapaaksi muuttujaksi voidaan valita vaikkapa aika t. Oletamme, että funktiot x ja y ovat ajanfunktioita.
1. kertaluvun vakiokertoimisen differentiaaliyhtälösysteemin

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + 2y \\ y' &= -2x \end{aligned}$$

ratkaisujen luonne riippuu karakteristisen yhtälön juurista. Sijoitetaan 1. yhtälöön $x = -\frac{1}{2}y'$, $x' = -\frac{1}{2}y''$. Saadaan funktiolle $y(t)$ yhtälö

$$-\frac{1}{2}y'' = -\frac{\alpha}{2}y' + 2y \ \Rightarrow\ y'' - \alpha y' + 4y = 0.$$

Karakteristisen yhtälön

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 4 = 0$$

juuret ovat

$$\lambda = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}.$$

1. Kun $-4 < \alpha < 4$, juuret ovat kompleksisia. Tällöin ratkaisut voivat olla vaimenevia värähtelyjä, kasvavia värähtelyjä tai rajoitetusti värähteleviä.

   (a) Kun $-4 < \alpha < 0$, juuren reaaliosa on negatiivinen ja siten ratkaisut ovat vaimenevia värähtelyjä, sekä $y(t)$ ja $x(t) = -\frac{1}{2}y'(t)$. Ratkaisukäyrä on stabiili spiraali. Sekä $x(t)$ että $y(t)$ suppenevat kohti nollaa.

(b) Kun $\alpha = 0$, juuret puhtaasti imaginaarisia $\lambda = \pm 4\mathrm{i}$ ja ratkaisut jaksollisia trigonometrisia funktioita $y(t) = A\cos(4t+\phi)$, $x(t) = -2A\sin(4t+\phi)$. Origo on stabiili keskus.

(c) Kun $0 < \alpha < 4$, juurten reaaliosa on positiivinen ja silloin ratkaisukäyrä

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}t}\Big(C_1\cos(\frac{\sqrt{16-\alpha^2}}{2}t) + C_2\sin(\frac{\sqrt{16-\alpha^2}}{2}t)\Big), \\ x(t) &= \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}t}\Big((\frac{-\alpha C_1 - C_2\sqrt{16-\alpha^2}}{4})\cos(\frac{\sqrt{16-\alpha^2}}{2}t) \\ &\quad + (\frac{-C_2\alpha + C_1\sqrt{16-\alpha^2}}{4})\sin(\frac{\sqrt{16-\alpha^2}}{2}t)\Big). \end{aligned}$$

on epästabiili spiraali.

2. Kun $\alpha \leq -4$ juuret ovat negatiivisia ja ratkaisukäyrä on stabiili nielu. Sekä x että y suppenevat kohti nollaa, kun $t \to \infty$.

3. Kun $\alpha \geq 4$, juuret ovat positiivisia ja ratkaisut loittonevat origosta. Tällöin tasapainotila on epästabiili lähde.

Kun $\alpha = -3$, niin ratkaisukäyrä on (kts. yllä) stabiili spiraali, missä $\frac{\sqrt{16-\alpha^2}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{3t}{2}}\Big(\frac{3C_1 - C_2\sqrt{7}}{4}\cos(\frac{\sqrt{7}t}{2}) + \frac{3C_2 + \sqrt{7}C_1}{4}\sin(\frac{\sqrt{7}t}{2})\Big) \\ y(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{3t}{2}}\Big(C_1\cos(\frac{\sqrt{7}t}{2}) + C_2\sin(\frac{\sqrt{7}t}{2})\Big) \end{aligned}$$

Kun $\alpha = -5$, juuret ovat $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = -4$. Tällöin

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{-4t} \\ x(t) &= \frac{C_1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{-4t}. \end{aligned}$$

5 Määritellään

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x - 2x^2 + xy \\ f_2(x,y) &= y + xy - 2y^2. \end{aligned}$$

Jakobiaani on tällöin

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial_x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial_y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial_x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4x+y & x \\ y & 1+x-4y \end{bmatrix}.$$

Tasapainotilat: Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} x(1-2x+y) &= 0 \\ y(1+x-2y) &= 0. \end{aligned}$$

Yhtälöparilla on neljä nollakohtaa, jotka ovat samalla differentiaaliyhtälösysteemin tasapainotilat:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0),\ (\hat{x}, \hat{y}) = (0, \frac{1}{2}),\ (\hat{x}, \hat{y}) = (\frac{1}{2}, 0),\ (\hat{x}, \hat{y}) = (1, 1).$$

1. Tasapainotilan $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ ympäristössä systeemi käyttäytyy kuten

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

   Matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$, joten tasapainotila on lähde.

2. Tasapainotilan $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, \frac{1}{2})$ ympäristössä matriisi

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

   Ominaisarvot $\lambda_1 = \frac{3}{2},\ \lambda_2 = -1$, joten tasapainotila on satulapiste.

3. Tasapainotilan $(\hat{x}, \hat{y}) = (\frac{1}{2}, 0)$ ympäristössä matriisi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

   Ominaisarvot $\lambda_1 = \frac{3}{2},\ \lambda_2 = -1$, joten tasapainotila on satulapiste.

4. Todella mielenkiintoinen tasapainotila, jota kohti systeemi hakeutuu eksponentiaalista vauhtia, on $(\hat{x}, \hat{y}) = (1, 1)$. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

   ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -1$. Joten tämä tasapainotila on stabiili nielu.