DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 11

Tähdellä merkityt tehtävät ovat ns. lisäpistetehtävät.

1. Ratkaise eliminointimenetelmällä

   a)

$$\begin{aligned} y' &= -4y + 6z, \qquad && y(0) = 3 \\ z' &= -3y + 5z, \qquad && z(0) = 2. \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= z + 1 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= -y. \end{aligned}$$

2*. Ratkaise seuraava lineaarinen systeemi

$$\begin{array}{l} x' = -\frac{1}{2}x + y \\ y' = \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}y \end{array}.$$

   Origo on systeemin tasapainotila. Määrää sen laatu.

3. Ratkaise eliminointimenetelmällä tuntemattomat funktiot $y(x)$ ja $z(x)$ differentiaaliyhtälöparista

$$\begin{array}{rcl} y' & = & -2z, \\ z' & = & 2y + \mathrm{e}^{-x}. \end{array}$$

   Määrää myös se ratkaisupari, joka toteuttaa ehdot $y(0) = 5$ ja $z(0) = 2$.

4. Tutkitaan lineaarista systeemiä

$$\begin{array}{l} x' = \alpha x + 2y \\ y' = -2x \end{array}.$$

   a) Määritä, miten ratkaisujen käyttäytyminen vaihtelee vakion α arvon mukaan. Etsi sellaiset vakion α rajatapaukset, joissa ratkaisujen käyttäytyminen tai stabiliteetti muuttuu.

   b) Ratkaise tehtävä, kun $\alpha = -3$ ja piirrä ratkaisua esittävä käyrä faasitasossa.

   c) Ratkaise tehtävä, kun $\alpha = -5$ ja piirrä ratkaisua esittävä käyrä faasitasossa.

5. Differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} x'(t) = x(1 - 2x + y) \\ y'(t) = y(1 + x - 2y) \end{cases}$$

   kuvaa kahden symbioosissa elävän populaation lukumääriä. Määrää systeemin tasapainotilat ja niiden laatu.

Vastaukset:

1. a) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x},\ z(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}C_2\,\mathrm{e}^{-x}$,. Alkuehdot toteuttava ratkaisupari: $y(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{-x},\ z(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x}$,

b) $z(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - 1,\ y(x) = -C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$,

2. $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-2t} + B\,\mathrm{e}^{t},\ y(t) = -\frac{3}{2}A\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}B\,\mathrm{e}^{t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$,

3. $\{y(x), z(x)\} = \Big\{C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{-x}, -C_2 \cos(2x) + C_1 \sin(2x) - \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-x}\Big\}$,
alkuehdot toteuttava ratkaisupari: $y(x) = \frac{27}{5} \cos(2x) - \frac{11}{5} \sin(2x) - \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{-x},\ z(x) = \frac{11}{5} \cos(2x) + \frac{27}{5} \sin(2x) - \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-x}$,

4. b) $y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\Big(A \cos(\frac{\sqrt{7}}{2}t) + B \sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t)\Big), x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\Big(\frac{3A-\sqrt{7}B}{4}) \cos(\frac{\sqrt{7}}{2}t) + (\frac{3B+\sqrt{7}A}{4}) \sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t)\Big)$,

c) $y(t) = A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{-4t},\ x(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + 2B\,\mathrm{e}^{-4t}$.