DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Kevät 2022, Harjoitus 10, ratkaisut

Tehtävä 1 Yritämme siis ratkaista yhtälöä

$$LI'' + RI' + (\frac{1}{C})I = \omega \cdot V_0 \cos(\omega t),$$

Koska vastaavan homogeeniyhtälön kertoimet ovat positiivisia, niin väistämättä karakteristisen yhtälön $p(\lambda) = L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$ juurten reaaliosa on negatiivinen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}.$$

Lisäksi reaaliosa on aina nollasta eroava. Siten homogeeniyhtälön vaikutus ratkaisuun vaimenee pitkän ajan kuluttua. Häiriöfunktio ei voi olla homogeeniyhtälön ratkaisu. Voimme siis keskittyä tutkimaan epähomogeenisen yhtälön yksityisratkaisun käyttäytymistä, kun aikaa on kulunut riittävän kauan.
Ymmärtääksemme virran olemusta tutkitaan yhtälön

$$Lz'' + Rz' + \frac{1}{C}z = V_0\omega\, \mathrm{e}^{i\omega t}$$

yksityisratkaisua määräämättömien kertoimien menetelmällä. Tällöin alkuperäisen ongelman ratkaisu on $I(t) = \operatorname{Re} z(t)$ - superpositioperiaatteen nojalla.
Yksityisratkaisuyrite $z_p(t) = A\,\mathrm{e}^{i\omega t}$: $z_p'(t) = i\omega z_p(t)$, $z_p''(t) = (i\omega)^2 z_p(t)$. Sijoittamalla nämä yhtälöön saadaan

$$p(i\omega)A \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} = V_0\omega\, \mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Joten yksityisratkaisu

$$z_p(t) = \frac{V_0\omega}{p(i\omega)} \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Kohta 1: Funktio z_p on samassa vaiheessa jännitteen kanssa, jos ja vain jos sen reaaliosa on $\sin(\omega t)$:n monikerta. Tämä on mahdollista vain silloin kun $p(i\omega)$:n reaaliosa on on nolla. Koska

$$p(i\omega) = -L\omega^2 + \frac{1}{C} + iR\omega,$$

niin virta ja jännite on samassa vaiheessa ehdolla:

$$\frac{1}{C} = L\omega^2.$$

Kohta 2: Edellisen kohdan nojalla $C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0.5\times4\times10^4}$ F $= 50 \times 10^{-6}$ F $= 50$ μF. Maksimijännitteellä ja vastuksella ei ole väliä.
Kohta 3: Virta $I_p(t) = \operatorname{Re} z_p(t)$. Sinimuotoisen ratkaisun amplitudi on $|\frac{V_0\omega}{p(i\omega)}|$, mikä saavuttaa maksimiarvonsa, kun sen käänteisluku

$$|\frac{(I/C - L\omega^2) + iR\omega}{V_0\omega}| = |(\frac{1}{C\omega} - L\omega) + iR| \cdot \frac{1}{V_0}$$

on minimissään. Kompleksiluvun imaginaariosa on vakio R. Kompleksiluvun minimiarvo saavutetaan, kun reaaliosa on nolla:

$$\frac{1}{C\omega} - L\omega = 0 \text{ eli } \frac{1}{C} = L\omega^2.$$

Näin ollen virran maksimiamplitudi on $I_r = V_0/R = 5$ A ja tällöin myös virran ja herätejännitteen vaihe-ero on nolla (kts. kohta 1). Lisäksi $\omega = 100\text{rad}/s$.

Tehtävä 2 Käytetään Laplace-muunnosta. Impulssivasteen L-muunnos (kts. taulukot)

$$W(s) = \mathcal{L}(w)(s) = \frac{3/2}{(s+1/2)^2 + 9/4} = \frac{1}{\frac{2}{3}(s^2 + s + \frac{5}{2})},$$

joten karakteristinen polynomi

$$p(s) = \frac{2}{3}\Big(s^2 + s + \frac{5}{2}\Big).$$

Siirtofunktion navat ovat karakteristisen polynomin juuret:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i.$$

Koska mekaanisen laitteen sisäiset värähtelyt (homogeeniyhtälön ratkaisu) vaimenevat eksponentiaalisesti (juurilla negatiivinen reaaliosa), niin riittää tutkia sinimuotoisia ulkoisia herätteitä. Tästä syystä ratkaistaan muotoa $f(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$ olevan ulkoisen herätteen yksityisratkaisu. Yksityisratkaisuyrite $z(t) = A(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}$. Sijoittamalla $z'(t) = i\omega z(t)$ ja $z''(t) = -\omega^2 z(t)$ yhtälöön voidaan ratkaista tuntematon vakio

$$A(\omega) = \frac{3/2}{((5/2 - \omega^2) + i\omega)}$$

Pitää välttää sitä taajuutta, milloin amplitudi (kompleksivasteen itseisarvo) $|A(\omega)|$ on suurimmillaan. Amplitudin

$$|A(\omega)| = \frac{3/2}{\sqrt{\Big((5/2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Big)}}$$

maksimiarvo saavutetaan, kun nimittäjä (tai sen neliö) $\Big((5/2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Big)$ on minimissään. Funktion

$$g(\omega) = \Big((5/2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Big)$$

derivaatta on (derivointi kulmataajuuden ω suhteen)

$$g'(\omega) = -4\omega(\frac{5}{2} - \omega^2) + 2\omega = \omega(4\omega^2 - 8).$$

Derivaatan nollakohdat löytyvät kulmataajuuden arvoilla $\omega = 0$ ja $\omega = \pm\sqrt{2}$. Kuorma-auton tulisi välttää kulmataajuutta $\omega_r = \sqrt{2}$, mikä aiheuttaa pahimman mahdollisen värinän antiikkiselle mekaaniselle laitteelle.