

Tekniikan matematiikka

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT (031076P)

2. välikoe, 27.4.2023

Lue tehtävät huolellisesti. Laskut, välivaiheet ja perustelut näkyviin. Pelkkä oikea vastaus ilman välivaiheita ei oikeuta täysiin pisteisiin.

1. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = -6e^x,$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

2. Ratkaise Laplace-muunnoksella alkuarvot tehtävä

$$y'' + 4y' + 3y = \delta(t - 2)$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

3. Ratkaise differentiaaliyhtälösystemin

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$$

yleinen ratkaisu ja se ratkaisupari, joka toteuttaa ehdot

$$x(0) = 0$$
$$y(0) = 3.$$

4. Funktion $f(t)$ Laplace-muunnos on

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

Määrä funktion $f(t)$.

Laplace-muunnoksen kaavoja:

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$

$$\mathcal{L}(e^{ct} f(t)) = F(s-c)$$
$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$
$$\mathcal{L}(H(t-c) f(t-c)) = e^{-cs} F(s)$$
$$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$$
$$\mathcal{L}(y'') = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$
$$\mathcal{L}(y') = sY(s) - y(0)$$
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(t) dt\right) = \frac{1}{s} Y(s)$$