Tekniikan matematiikka

Differentiaaliyhtälöt (031076P)

Loppukoe, 24.10.2019

Kokeessa ei saa olla omia taulukoita eikä kaavakokoelmia.
Lue tehtävät huolellisesti. Laskujen välivaiheet näkyviin. Pelkkä vastaus ei oikeuta täysiin pisteisiin. Tarkista vastauksesi.

1. Eräässä kesäjuhlassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. **Hyttysten määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään kyseisenä hetkenä.**

   Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö ja laske sen ratkaisuna hyttysten määrä hetkellä t. Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta?
   Huom! Kesäjuhlan luonteen takia hyttysiä ei juhlan aikana karkoitettu tai muuten vahingoitettu.

2. Määrää alkuarvotehtävän

$$y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

   ratkaisu.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 6y' + 8y = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$$

   käyttäen Laplace-muunnosta. Tässä $\delta(t)$ on Dirac'n deltafunktio.

4. a) Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemin alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y, \ x(0) = 1 \\ y' &= -2x - 4y, \ y(0) = 1. \end{aligned} \qquad (4\ \text{p})$$

   missä funktiot x ja y ovat ajan t funktioita.

   b) Millä reaalisen parametrin k arvoilla differentiaaliyhtälösysteemillä

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y, \\ y' &= -2x + ky. \end{aligned} \qquad (2\ \text{p})$$

   on periodisia ratkaisuja?

Kaavoja:

$$\int e^{kx}\cos(\omega x)\,dx = \frac{1}{k^2+\omega^2}e^{kx}\Big(k\cos(\omega x) + \omega\sin(\omega x)\Big) \qquad (1)$$

$$\int e^{kx}\sin(\omega x)\,dx = \frac{1}{k^2+\omega^2}e^{kx}\Big(k\sin(\omega x) - \omega\cos(\omega x)\Big) \qquad (2)$$

Laplace-muunnoksen kaavoja:

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$

$\mathcal{L}(e^{ct}f(t)) = F(s-c)$
$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$
$\mathcal{L}(H(t-c)f(t-c)) = e^{-cs}F(s)$
$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$
$\mathcal{L}(y'') = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
$\mathcal{L}(y') = sY(s) - y(0)$
$\mathcal{L}(\int_0^t y(t)dt) = \frac{1}{s}Y(s)$