TEKNILLINEN MATEMATIIKKA

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT (031076P)

Toinen välikoe 25.4.2019

Kokeessa ei saa olla omia taulukoita eikä kaavakokoelmia.
Kirjoita laskujen välivaiheet näkyviin.

1. Ratkaise vakiokertoimisen täydellisen yhtälön

$$y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-x}$$

ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0,\ y'(0) = -\frac{1}{2}$.

2. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä

$$y'' + 5y' + 6y = \delta(t-1), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

3. Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemin alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y,\ x(0) = 0 \\ y' &= -2x - y,\ y(0) = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

4. Hyvin voidellulla alustalla liikkuva massakappale ($m = 1$ kg) on kytketty seinään jousella, jonka jousivakio on $k = 1$. Ilmanvastus ja alustan aiheuttamaa kitkaa ei oteta huomioon. Tällöin kappale noudattaa liikeyhtälöä

$$x''(t) + x(t) = 0,$$

missä kappaleen sijainti riippuu alkutilasta $x(0)$ ja alkunopeudesta $x'(0)$. Alussa massakappale poikkeutetaan lepotilasta (lepotilassa $x = 0$) ja päästetään irti. Tilannetta kuvaa alkuehdot $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$. Milloin massakappale ohittaa ensimmäisen kerran lepotilan?
Systeemin on kytketty leka, jolla massakappaleeseen voidaan kohdistaa äkillinen impulssi minä ajanhetkenä tahansa. Tilannetta voidaan mallintaa yhtälöllä

$$x''(t) + x(t) = A\delta(t-b),\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$$

Millä ajanhetkellä $t = b$ ja minkä suuruinen impulssi A massakappaleeseen on kohdistettava, että se pysähtyisi lepotilaan $x = 0$? Toisin sanoen, millä A:n ja b:n arvoilla $x(t) = 0$, kun $t > b$.

Laplace-muunnoksen kaavoja:

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$

$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{ct}f(t)) = F(s-c)$
$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$
$\mathcal{L}(H(t-c)f(t-c)) = \mathrm{e}^{-cs}F(s)$
$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = \mathrm{e}^{-cs}$
$\mathcal{L}(y'') = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
$\mathcal{L}(y') = sY(s) - y(0)$
$\mathcal{L}(\int_0^t y(t)\mathrm{d}t) = \frac{1}{s}Y(s)$

Muita kaavoja: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$