

Tekniikan matematiikka

Differentiaaliyhtälöt (031076P)

1. välikoe, 4.4.2019

Kokeessa ei saa olla omia taulukoita eikä kaavakokoelmia.

Lue tehtävät huolellisesti. Laskut ja välivaiheet näkyviin. Tarkista vastauksesi.

1. Ratkaise differentiaaliyhtälön alkuarvot tehtävä

$$\begin{aligned}y' + 3y &= \cos(x), \\ y(0) &= \frac{7}{10}.\end{aligned}$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälön $y' - y = -e^{-x}y^2$ alkuehdon $y(0) = 1$ toteuttava ratkaisu.

3. Tarkastellaan toisen kertaluvun vakiokerroimista differentiaaliyhtälöä

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$

- Kirjoita yhtälöön liittyvä karakteristinen yhtälö ja määrää sen juuret.
- Mikä on differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu?
- Määrää se ratkaisu, joka toteuttaa ehdot

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

4. Vuonna 2016 voimaan astuneen kalastuslain nojalla luonnossa syntyneitä järvilohia ei saa ottaa saaliiksi. Lailla pyritään turvaamaan uhanalaisen lajin asemaa. Yksinkertaisissa matemaattisissa malleissa järvilohipopulaation koko noudattaa logistista yhtälöä

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - y),$$

missä kasvukerroin $k > 0$ on vakio ja populaation koko $y(t)$ on skaalattu siten, että populaation kautokyky on 1.

Rauhoituksesta huolimatta onto virustartunta on iskenyt järvilohikantaan, jonka johdosta kasvukerroin pienenee ajanmyötä. Näin ollen järvilohipopulaatio noudattaa **modifioitua logistista yhtälöä**

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(1+t)^2}y(1-y), \quad (1)$$

- Määrää yhtälön (1) yleinen ratkaisu (3p).
- Jos järvilohipopulaation koko alussa oli $y(0) = \frac{1}{2}$, niin mikä se on ajanhetkellä $t = 10$ (2p).
- Onko systeemillä tasapainotiloja? Miten systeemi käyttäytyy, kun aika t lähestyy ääretöntä? (1p)

Kaavoja: $\int e^{bx} \cos(\omega x) dx = \frac{1}{k^2 + \omega^2} e^{kx} (k \cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)).$