

Tekniikan matematiikka

Differentiaaliyhtälöt (031076P)

Loppukoe, 10.6.2017

Kokeessa ei saa olla omia taulukoita eikä kaavakokoelmia.

Lue tehtävät huolellisesti. Laskut näkyviin. Tarkista vastauksesi.

1. Eräessä kesäjuhlassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Hyttysten määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sinä hetkenä.

Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö ja laske sen ratkaisuna hyttysten määrä hetkellä t . Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta?

Huom! Kesäjuhlan luonteen takia hyttysiä ei juhlan aikana karkoitettu tai muuten vahingoitettu.

2. Ratkaise differentiaaliyhtälön $x^2y' = 2xy + 1$, $x > 0$, yleinen ratkaisu.
3. Ratkaise Laplacen muunnoksella alkuarvotehtävä

$$y'' + 6y' + 13y = 2\delta(t - 5), y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälösystemin alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y' = 3z - y + 10e^{3x}, & y(0) = 2 \\ z' = z + y, & z(0) = 0. \end{cases}$$

Laplace-muunnoksen kaavoja:

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$

$\mathcal{L}(e^{ct} f(t)) = F(s - c)$
$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$
$\mathcal{L}(H(t - c) f(t - c)) = e^{-cs} F(s)$
$\mathcal{L}(\delta(t - c)) = e^{-cs}$
$\mathcal{L}(y'') = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$
$\mathcal{L}(y') = sY(s) - y(0)$
$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(t) dt\right) = \frac{1}{s} Y(s)$