SOVELLETTU JA LASKENNALLINEN MATEMATIIKKA

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT (031076P)

Loppukoe 27.10.2016

Kokeessa ei saa olla omia taulukoita eikä kaavakokoelmia.
Lue tehtävät huolellisesti. Laskujen välivaiheet näkyviin.

1. Määrää differentiaaliyhtälön

$$y'' + 4y' - 12y = -36x^2 + 1$$

yleinen ratkaisu.

2. Olkoon $x > 0$. Määrää Bernoullin yhtälön

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2y^4$$

yleinen ratkaisu sijoituksen $z = y^{-3}$ avulla.

3. Ratkaise Laplace-muunnoksella seuraava alkuarvotehtävä

$$y'' + 7y' + 10y = 4\delta(t-2), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

4. a) Määrää käyräparven

$$xy^2 - \frac{1}{3}x^3 + y^2 = C$$

differentiaaliyhtälö. (3p)

b) Tarkastelemme lääkeaineen poistumista elimistöstä. Muuttuja t edustaa aikaa tunteina ja tuntematon funktio $u = u(t)$ [mg/l] on veren hetkellinen lääkeainepitoisuus. Tiedetään, että lääkeaineen poistumisnopeus on suoraan verrannollinen lääkeaineen hetkelliseen pitoisuuteen, joten lääkeaineen pitoisuutta voidaan mallintaa differentiaaliyhtälöllä:

$$u'(t) = -\frac{2}{7}u(t).$$

Ratkaise lääkeaineen hetkellistä pitoisuutta kuvaava funktio. (3p)

Laplace-muunnoksen kaavoja:

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}(e^{ct}f(t)) = F(s-c)$$
$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$
$$\mathcal{L}(H(t-c)f(t-c)) = e^{-cs}F(s)$$
$$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$$