

TEKNILLINEN MATEMATIIKKA
DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT (031076P)

Toinen välikoe 12.5.2016

Kokeessa ei saa olla omia taulukoita eikä kaavakokoelmia.
Kirjoita laskujen välivaiheet näkyviin.

1. Määrä differentiaaliyhtälön

$$y'' - 3y' - 10y = 20x^2$$

yleinen ratkaisu.

2. Tarkastellaan seuraava differentiaaliyhtälösystemiä

$$\begin{cases} y' = -2y + z \\ z' = 8y + 5z. \end{cases}$$

a) Määrä eliminointimenetelmällä yleinen ratkaisu $\{y(x), z(x)\}$. (4p)

b) Määrä se ratkaisupari, joka toteuttaa ehdot $y(0) = 2$ ja $z(0) = 1$. (2p)

3. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen seuraavat alkuarvotehävät:

a)

$$y' + 4y = 3e^{-3t}, \quad y(0) = 5, \quad (3p)$$

b)

$$y'' + 7y' + 10y = 3\delta(t - 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (3p)$$

4. Olkoon $x > 0$.

a) Ratkaise Cauchy-Eulerin homogeeniyhtälö

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0. \quad (2p)$$

b) Osoita, että funktio $y_0(x) = \frac{1}{4}x^{-1}(2 \ln(x) - 1)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = x^{-1}. \quad (2p)$$

c) Esitä differentiaaliyhtälön

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = x^{-1}$$

yleinen ratkaisu. (2p)

Laplace-muunnoksen kaavoja:

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}(e^{ct}f(t)) = F(s - c)$
$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$
$\mathcal{L}(H(t - c)f(t - c)) = e^{-cs}F(s)$
$\mathcal{L}(\delta(t - c)) = e^{-cs}$