TEKNILLINEN TIEDEKUNTA, MATEMATIIKAN JAOS

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Välikoe 1 18.2.2013

1. a) Laske differentiaaliyhtälön $y''+36y' = 0$ yleinen ratkaisu. Laske myös alkuehdot $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ toteuttava ratkaisu.

   b) Laske differentiaaliyhtälön $y''+36y = 0$ yleinen ratkaisu. Laske myös alkuehdot $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ toteuttava ratkaisu.

   c) Laske käyräparven $x^2 + (y-2)^2 = C$ kohtisuorat leikkaajat.

   Vihje:

   Kaksi suoraa leikkaa toisensa kohtisuorasti, jos niiden kulmakertoimien tulo on $k_1 k_2 = -1$.

2. a) Olkoot $A = A(x)$ ja $B = B(x)$ tunnettuja muuttujan x funktioita. Perustele laskemalla se, että Bernoullin differentiaaliyhtälö

$$y' + A(x)y = B(x)y^k, \quad (k \neq 0, k \neq 1)$$

   muuntuu sijoituksella $z = y^{1-k}$ ensimmäisen kertaluvun lineaariyhtälöksi.

   b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + \frac{3}{x}y = xy^2$. Laskettava yleinen ratkaisu ja mahdolliset erikoisratkaisut.

3. a) Ratkaise Laplacen muunnoksella $y' + 4y = 4e^{-2t}$, $y(0) = 3$.

   b) Laske $\mathcal{L}^{-1}(\frac{3s+5}{s^2+10s+29})$.

   c) Laske $\mathcal{L}^{-1}(\frac{3s+5}{s^2+10s+25})$.

4. Säiliössä on 100 l vettä, johon on liuennut 4 kg suolaa. Tietyllä hetkellä hanat aukaistaan ja säiliöstä virtaa ulos 10 l/min suolavesiliuosta. Samanaikaisesti säiliöön virtaa 5 l/ min suolavesiliuosta, jonka suolapitoisuus on 0.1 kg/l. Sekoitin pitää liuoksen homogeenisena. Johda alkuarvotehtävä hetkelliselle suolamäärälle ja ratkaise se. Oletamme, että suolan liukenemisesta aiheutuva tilavuuden muutos voidaan jättää huomiotta. Millä hetkellä säiliössä on eniten suolaa?

Taulukko 1. Funktioita ja niiden Laplace–muunnoksia

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}(e^{ct}f(t)) = F(s-c)$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}(H(t-c)f(t-c)) = e^{-cs}F(s)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$