TEKNILLINEN TIEDEKUNTA, MATEMATIIKAN JAOS

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Loppukoe 5.5.2012

1. Laske differentiaaliyhtälön
$$y'' - 3y' - 10y = 14e^{5x}$$
yleinen ratkaisu.

2. Ratkaise yhtälö $y'' + cy' + 49y = 0$, kun kitkakerroin $c \geq 0$.

3. Olkoon ruokosokerin määrä 100g. **Ruokosokeri liukenee veteen laimeaksi sokeriliuokseksi nopeudella, joka on suoraan verrannollinen liukenemattomaan sokerimäärään.**

   a) Valitse ensin merkinnät ja kirjoita sitten liukenemista kuvaava differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä, jos alussa kaikki sokeri on liukenemattomana. (2p)

   b) Määrää ratkaisu, jos kahden tunnin kuluttua puolet (50 g) sokerista on liuennut ja alussa kaikki sokeri oli liukenemattomana. (4p)

4. Ratkaise yhtälö $e^y + (xe^y - 2y)y' = 0$. Totea ensin, että yhtälö on eksakti ja ratkaise yhtälö eksaktin yhtälön tekniikalla. Näytä, että laskemasi yleinen ratkaisu on todella annetun differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.

5. Ratkaise Laplacen muunnoksella alkuarvotehtävä
$$y'' + 12y' + 40y = 10e^{-2t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Taulukko 1. Funktioita ja niiden Laplace–muunnoksia

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}(e^{ct}f(t)) = F(s-c)$$
$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$
$$\mathcal{L}(H(t-c)f(t-c)) = e^{-cs}F(s)$$
$$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$$
$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$