**TEKNILLINEN TIEDEKUNTA, MATEMATIIKAN JAOS**

**DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT**

## Loppukoe 16.6.2012

1. Laske differentiaaliyhtälön $y'' - 3y' - 10y = 50x^2$ yleinen ratkaisu.

2. Laske differentiaaliyhtälösysteemin

$$\begin{cases} y'(x) & = z(x) + 1, \\ z'(x) & = -y(x), \end{cases}$$

yleinen ratkaisu.
Määrää lisäksi se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0$ ja $z(0) = 0$.
Esittele ne ehdot, jotka differentiaaliyhtälösysteemin alkuarvotehtävän ratkaisun tulee toteuttaa ja näytä, että laskemasi ratkaisu on todella annetun systemin alkuarvotehtävän ratkaisu.

3. Käytämme järven puhdistumiselle säiliömallia, jossa oletamme, että saastepitoisuus on homogeeninen, sekoittuminen on ideaalista ja järven vesitilavuus pysyy vakiona. Aikaa mitataan saastuttamisen lopettamishetkestä alkaen. Aluksi järvessä on V litraa vettä, jonka saastepitoisuus on aluksi $u_0$ g/l. Tiukentuneiden määräysten vuoksi järven läheisyydessä olevan teollisuuden ja kaatopaikan päästöt loppuvat kokonaan kyseisen saasteen osalta. Järveen tulee vuodessa $P$ litraa puhdasta vettä. Sama määrä saasteseosta poistuu vuoden aikana järvestä. Hetkellinen saastepitoisuus $u = u(t)$ g/l saadaan differentiaaliyhtälöstä

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{P}{V}\right)u.$$

Esitä differentiaaliyhtälön johto. Ratkaise differentiaaliyhtälöstä hetkellinen saastepitoisuus.
Määrää kaava ajalle, joka kuluu siihen, että saastepitoisuus pienenee arvoon $u_0/10$ g/l.
Sijoita saamaasi ajan kaavaan Ontario-järven lukuarvot $V = 1.2 \times 10^{13}$ litraa ja $P = 6.5 \times 10^{10}$ litraa.

4. Ratkaise vakioiden varioinnilla täydellinen yhtälö

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = x^{-2}, \quad x > 0.$$

5. a) Oletamme, että raja-arvo $\lim_{M\to\infty} f(M)e^{-sM} = 0$. Johda osittaisintegroinnilla kaava Laplace-muuntuvan funktion $f$ derivaatan Laplacen muunnokselle. (1p)
b) Ratkaise Laplacen muunnoksen avulla alkuarvotehtävä (2p)

$$y'' + 10y' + 29y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -4.$$

c) Ratkaise Laplacen muunnoksella alkuarvotehtävä (3p)

$$y'' + 10y' + 29y = 3\delta(t-2), y(0) = 2, y'(0) = -4.$$

Tässä $\delta(t - c)$ kuvaa hetkellä $t = c$ vaikuttavaa yksikköimpulssia. Esitä myös ratkaisun paloittain määritelty lauseke.

KÄÄNNÄ

**Taulukko 1.** Funktioita ja niiden Laplace–muunnoksia

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ | $\frac{1}{s^n}$ |

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |

$$\mathcal{L}(e^{ct} f(t)) = F(s-c)$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}(H(t-c) f(t-c)) = e^{-cs} F(s)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$