TEKNILLINEN TIEDEKUNTA, MATEMATIIKAN JAOS

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Loppukoe 15.9.2012

Kokeessa ei saa olla omia taulukoita eikä kaavakokoelmia.
Lue tehtävät huolellisesti. Laskut näkyviin. Tarkista vastauksesi.

1. Laske differentiaaliyhtälösysteemin

$$\begin{cases} u'(t) &= -u(t) + v(t), \\ v'(t) &= u(t) - v(t), \end{cases}$$

yleinen ratkaisu. Määrää lisäksi se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $u(0) = 2$ ja $v(0) = 0$.

2. a) Määrää differentiaaliyhtälön $y' = -4xy$ kaikki ratkaisut. Esitä vastaus y:n suhteen ratkaistussa muodossa. Ratkaise differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y' = -4xy, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

c) Ratkaise differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y' = -4xy, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Picard-Lindelöfin menetelmällä. Käytä Picard-Lindelöfin menetelmässä alkuarvausta $\varphi_0(x) = 0$ ja laske kolme iteraatiokierrosta.

3. Ratkaise vakioiden varioinnilla täydellinen yhtälö $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^2, \quad x > 0$.

4. a) Esitä tulon derivointikaava ja johda sen avulla osittaisintegrointikaava.
b) Oletamme, että raja-arvo $\lim\limits_{M\to\infty} f(M)e^{-sM} = 0$. Johda osittaisintegroinnilla kaava Laplace-muuntuvan funktion f derivaatan Laplacen muunnokselle.
c) Esitä funktio

$$g(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < 2, \\ 3, & 2 < t < 4, \\ 0, & t > 4, \end{cases}$$

Heavisiden yksikköaskelfunktion avulla. Piirrä kuva funktiosta g.
d) Laske c) kohdan funktion Laplacen muunnos $G(s)$.
e) Ratkaise alkuarvotehtävä $y' + y = g(t)$, $y(0) = 0$. Häiriöfunktio g on määritelty c) kohdassa. Esitä ratkaisun paloittain määritelty muoto.

Taulukko 1. Funktioita ja niiden Laplace–muunnoksia

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}(e^{ct}f(t)) = F(s-c)$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}(H(t-c)f(t-c)) = e^{-cs}F(s)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$