TEKNILLINEN TIEDEKUNTA, MATEMATIIKAN JAOS

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Loppukoe 1.12.2012

1. Tarkastelemme lääkeaineen poistumista elimistöstä. Ratkaise seuraava malli veren lääkeainepitoisuudelle. Muuttuja t edustaa aikaa tunteina ja tuntematon funktio $u = u(t)$ [mg/l] on veren hetkellinen lääkeainepitoisuus. Oletetaan, että veren hetkellinen lääkeainepitoisuus toteuttaa ehdon $u(t) \geq 0$.

   Malli: Lääkeaineen poistumisnopeus on suoraan verrannollinen lääkeaineen hetkelliseen pitoisuuteen. Alussa veren lääkeainepitoisuus on a [mg/l].

   - Muodosta hetkellistä lääkeainepitoisuutta kuvaava differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä.
   - Laske ratkaisu, kun parametrit ovat $a = 14$ [mg/l] ja verrannollisuuskerroin on $k = 2$.
   - Kuinka kauan aikaa menee siihen, että lääkeaine on käytännössä poistunut elimistöstä, jos voimme pitää rajapitoisuutena pitoisuutta 1 [mg/l]?

2. Ratkaise funktiot (yleinen ratkaisu) $y(x)$ ja $z(x)$ differentiaaliyhtälöparista

$$\begin{cases} y' &= 3z - y + e^{3x}, \\ z' &= z + y. \end{cases}$$

   Tarkista, että laskemasi ratkaisu todella on ratkaisu.

3. Osoita, että funktiot $y_1(x) = e^x$ ja $y_2(x) = x + 1$ ovat toisen kertaluvun lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2$$

   vastaavan homogeeniyhtälön ratkaisuja ja että ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Määrää täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu vakioiden varioinnilla.

   (Vihje: Osittaisintegrointi $\int f'g\,dx = -\int fg'dx + fg$.)

4. a) Ratkaise Laplacen muunnoksella alkuarvotehtävä $y' + 2y = 3e^{-3t}$, $y(0) = 5$.

   b) Ratkaise Laplacen muunnoksella alkuarvotehtävä $y'' + 8y' + 41y = 41, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Taulukko 1. Funktioita ja niiden Laplace–muunnoksia

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}(e^{ct} f(t)) = F(s-c)$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}(H(t-c) f(t-c)) = e^{-cs} F(s)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$