TEKNILLINEN TIEDEKUNTA, MATEMATIIKAN JAOS

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Loppukoe 3.12.2011

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + 4y = \cos(2x) + e^{2x}$.

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = \frac{1}{x-y} + 1$. Vihje: sijoita $z = x - y$.

3. Ratkaise integraaliyhtälö
$$y(x) = 1 + \int_0^x (3t + y(t))\mathrm{d}t.$$
a) Käytä Picard-Lindelöfin menetelmää ja valitse alkuarvaukseksi $\varphi_0(x) = 1$. Laske kolme iteraatiokierrosta eli laske $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ ja $\varphi_3(x)$.
b) Määrää edellisen integraaliyhtälön tarkka ratkaisu ratkaisemalla vastaava differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä. Sovella integraalin derivoimiskaavaa
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

4. Osoita, että funktiot $y_1(x) = e^x$ ja $y_2(x) = x + 1$ ovat toisen kertaluvun lineaarista differentiaaliyhtälöä
$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2$$
vastaavan homogeeniyhtälön ratkaisuja että ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Määrää täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu vakioiden varioinnilla.
(Osittaisintegrointi $\int f'g dx = -\int fg' dx + fg$.)

5. Ratkaise Laplacen muunnoksella alkuarvotehtävät
$$a)\ \begin{cases} y'' + 6y' + 8y = 8 - 8H(t-3), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} y'' + 6y' + 8y = 8 - 8\delta(t-3), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$
Tässä H on askelfunktio ja $\delta(t-a)$ kuvaa hetkellä $t = a$ vaikuttavaa impulssia.

Taulukko 1. Funktioita ja niiden Laplace–muunnoksia

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}(e^{ct}f(t)) = F(s-c)$$
$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$
$$\mathcal{L}(H(t-c)f(t-c)) = e^{-cs}F(s)$$
$$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$$
$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$