TEKNILLINEN TIEDEKUNTA, MATEMATIIKAN JAOS

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Välikoe 2 11.4.2011

1. Laske differentiaaliyhtälön

$$y'' - y' - 12y = 72x^2$$

yleinen ratkaisu.

2. Ratkaise funktiot (yleinen ratkaisu) $y(x)$ ja $z(x)$ differentiaaliyhtälöparista

$$\begin{cases} y' &= 3z - y + e^{3x}, \\ z' &= z + y. \end{cases}$$

Tarkista, että laskemasi ratkaisu todella on ratkaisu.

3. Oheisessa tehtävässä muuttuja t edustaa aikaa ja tuntematon ratkaisu kuvaa iskunvaimentajaan liitetyn massapisteen poikkeamaa tasapainoasemasta. Olkoon vakio $b \geq 0$. Positiiviset vakion b arvot tarkoittavat sitä, että tasapainoasemasta poikkeutetulle massapisteelle annetaan alkunopeutta tasapainoasemaa kohti. Ehdossa $y'(0) = -b$ etumerkki ilmaisee alkunopeuden suunnan.

a) Ratkaise differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä (2p)

$$y'' + 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -b.$$

Tutki laskemaasi ratkaisua ja vastaa seuraaviin kysymyksiin. Jokaisesta alakohdasta on jaossa yksi piste.

b) Laske ratkaisun raja-arvo $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Miten alkuehtojen vaihtaminen vaikuttaa alkuarvotehtävän ratkaisun raja-arvoon?

c) Jos $b = 1$, niin mitä voit sanoa ratkaisun derivaatasta ja derivaatan merkistä välillä $[0, \infty[$? Mitä derivaatta sanoo ratkaisun käyttäytymisestä?

d) Jos $b = 7$, niin mitä voit sanoa ratkaisun derivaatasta ja derivaatan merkistä välillä $[0, \infty[$? Mitä derivaatta sanoo ratkaisun käyttäytymisestä?

e) Kuinka suuri vakion b arvon on vähintään oltava, jotta alkuarvotehtävän ratkaisulla olisi derivaatan nollakohta avoimella välillä $]0, \infty[$?

4. Tarkastelemme differentiaaliyhtälöä

$$(*) \qquad y(1 + xy) - xy' = 0.$$

a) Mikä on yhtälön (*) kertaluku? Onko yhtälö (*) lineaariyhtälö? Onko kyseessä homogeeniyhtälö?

b) Totea, että annettu differentiaaliyhtälö (*) ei ole eksakti.

c) Esittele käsite integroiva tekijä eksaktin yhtälön yhteydessä ja totea, että funktio $M(y) = y^{-2}$ on differentiaaliyhtälön (*) integroiva tekijä.

d) Määrää annetun integoivan tekijän avulla differentiaaliyhtälön (*) ratkaisu.

e) Näytä, että laskemasi ratkaisu todella on differentiaaliyhtälön (*) ratkaisu.

f) Esitä integroivan tekijän määrääminen yhtälölle (*), kun tiedetään, että integroiva tekijä on muotoa $M = M(y)$.

KÄÄNNÄ

5. a) Ratkaise Laplacen muunnoksella alkuarvotehtävä

$$y'' + 4y' + 3y = 3\delta(t-2), \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Esitä myös ratkaisun paloittain määritelty lauseke. Tässä $\delta(t-a)$ on hetkellä $t = a$ vaikuttava yksikköimpulssi.

b) Esitä derivoituvien funktioiden y_1 ja y_2 Wronskin determinantin määrittely.

Olkoot sitten funktiot y_1 ja y_2 kaksi differentiaaliyhtälön $y'' + y' + xy = 0$ ratkaisua. Laske Wronskin determinantin derivaatta ja totea laskemalla, että Wronskin toteuttaa differentiaaliyhtälön $\frac{dW}{dx} = -W$. Laske tämän perustella Wronskin determinantti $W(y_1, y_2; x)$.

Taulukko 1. Funktioita ja niiden Laplace–muunnoksia

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}(e^{ct} f(t)) = F(s-c)$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}(H(t-c) f(t-c)) = e^{-cs} F(s)$$

$Y(s)s^2 - sY(0) - Y'(0)$

$$\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$$

$sY(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$